

Automatisme du 11 septembre 2025

Exercice 1

Donner les racines de la fonction polynômiale $P(x) = -2x^2 + 3x + 2$ ainsi que sa forme canonique, sa forme factorisée et son tableau de variations.

Exercice 2

En remarquant que 2 et -1 sont racines de la fonction polynomiale f définie par

$$f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 14x^2 - x + 2$$

déterminer une forme factorisée de $f(x)$ est résoudre $f(x) \geq 0$.

Exercice 3

- a) Trouver deux entiers dont la somme fait 7 et le produit 10.
- b) Trouver deux entiers dont la somme vaut -2 et dont les sommes des inverses vaut $\frac{1}{4}$.

Exercice 4

1. Déterminer les valeurs suivantes où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a) A = 5! \qquad (b) B = \frac{5!}{2! \times 3!} \qquad (c) C = \frac{(n+2)!}{n!} \qquad (d) D = \frac{(2n+3)!}{4 \times n!}$$

2. Détermine la valeur des sommes suivantes :

$$(a) E = \sum_{k=1}^4 (5 - 2k). \quad (b) F = \sum_{k=1}^3 (2k - 3)^2. \quad (c) G = \sum_{k=2}^4 \frac{16}{2^k}. \quad (d) H = \sum_{k=1}^2 (k^2 - 2k).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire les expressions suivantes en utilisant le signe $\sum$:

$$\begin{aligned} (a) I &= 4^3 + 4^4 + 4^5 + \dots + 4^{10} \\ (b) \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + \dots + \frac{x^n}{2n} \\ (c) -x + \frac{x^2}{3} + \frac{-x^4}{9} + \frac{x^8}{27} + \dots + \frac{(-1)^{\dots} \times x^{\dots}}{3^n} \\ (d) J &= 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + \dots + \frac{1024}{10} \text{ (on remarquera que } 2^{10} = 1024) \end{aligned}$$

Exercice 5

On note $\alpha_n = \sum_{k=0}^n k$, $\beta_n = \sum_{k=0}^n k^2$ et $\gamma_n = \sum_{k=0}^n k^3$. Exprimer en fonction de α_n , β_n , γ_n et n les expressions suivantes :

$$a) \sum_{k=1}^n (k^2 - 5k + 1) \qquad b) \sum_{k=1}^n (1 - k)^2 \qquad c) \sum_{k=0}^n k(k-1)^2$$

Correction.

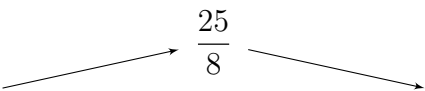
Réponse de l'exercice 1

Donner les racines de la fonction polynômiale $P(x) = -2x^2 + 3x + 2$ ainsi que sa forme canonique, sa forme factorisée et son tableau de variations.

- $-2x^2 + 3x + 2 = (x - 2)(-2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -\frac{1}{2}$
- Forme factorisée $P(x) = -2(x - 2)(-2x - 1)$.
- Forme canonique :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4} \quad \beta = P(\alpha) = -\frac{3^2}{8} + 3 \times \frac{3}{4} + 2 = \frac{25}{8}$$

- Tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
P			

Réponse de l'exercice 2

En remarquant que 2 et -1 sont racines de la fonction polynomiale f définie par

$$f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 14x^2 - x + 2$$

déterminer une forme factorisée de $f(x)$ est résoudre $f(x) \geq 0$.

- ☞ $(x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2$
- ☞ $f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 14x^2 - x + 2 = (x^2 - x - 2)(6x^2 + x - 1) = (x - 2)(x + 1)(6x^2 + x - 1)$
- ☞ On factorise le polynôme $6x^2 + x - 1$
 - ☐ $\Delta = 25$
 - ☐ $x_1 = \frac{-1 - 5}{12} = \frac{-1}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + 5}{12} = \frac{1}{3}$
 - ☐ Donc $f(x) = (x - 2)(x + 1) \times 6 \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(x + 1)(3x - 1)(2x + 1)$
- ☞ D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$x - 2$		-	-	-	-	+
$x + 1$	-	0	+	+	+	+
$3x - 1$	-	-	-	0	+	+
$2x + 1$	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	+	0	-	0	-	+

- ☞ Donc : $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\right] \cup [2, +\infty[$.

Réponse de l'exercice 3

- a) Trouver deux entiers dont la somme faire 7 et le produit 10. Si l'on x_1 et x_2 ces deux entiers l'on obtient :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 x_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 7 - x_1 \\ x_1(7 - x_1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 7 - x_1 \\ x_1^2 - 7x_1 + 10 = 0 \end{cases}$$

On résout l'équation $x^2 - 7x + 10 = 0$ on trouve les deux racines : 2 et 5.

Pour $x_1 = 2$ alors $x_2 = 5$ et si $x_1 = 5$ alors $x_2 = 2$. Les deux entiers cherchés sont donc 2 et 5.

- b) Trouver deux entiers dont la somme vaut -2 et dont les sommes des inverses vaut $\frac{1}{4}$.

Si l'on x_1 et x_2 ces deux entiers l'on obtient :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_2 + x_1 = \frac{x_1 x_2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2 - x_1 \\ x_1 x_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2 - x_1 \\ x_1(-2 - x_1) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2 - x_1 \\ x_1^2 + 2x_1 - 8 = 0 \end{cases}$$

On résout l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$ on trouve les deux racines : 2 et -4.

Et comme précédent les deux entiers cherchés sont 2 et -4.

Réponse de l'exercice 4

1. Déterminer les valeurs suivantes où $n \in \mathbb{N}^*$:

(a) $A = 5! = 120$

(b) $B = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$

(c) $C = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2)$

(d) $D = \frac{(2n+3)!}{4 \times n!} = \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1) \times \dots \times (n+1)}{4}$

2. Détermine la valeur des sommes suivantes :

(a) $E = \sum_{k=1}^4 (5 - 2k) = 3 + 1 - 1 - 3 = 0.$

(b) $F = \sum_{k=1}^3 (2k - 3)^2 = 1 + 1 + 9 = 11.$

(c) $G = \sum_{k=2}^4 \frac{16}{2^k} = 4 + 2 + 1 = 7.$

(d) $H = \sum_{k=1}^2 (k^2 - 2k) = -1.$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire les expressions suivantes en utilisant le signe $\sum$:

(a) $I = 4^3 + 4^4 + 4^5 + \dots + 4^{10} = \sum_{k=3}^{10} 4^k$

(b) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + \dots + \frac{x^n}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{2k}$

$$(c) \quad -x + \frac{x^2}{3} + \frac{-x^4}{9} + \frac{x^8}{27} + \cdots + \frac{(-1)^n \times x^{2^n}}{3^n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1} \times x^{2^k}}{3^k}$$

$$(d) \quad J = 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + \cdots + \frac{1024}{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{k} \text{ (on remarquera que } 2^{10} = 1024)$$

Réponse de l'exercice 5

On note $\alpha_n = \sum_{k=0}^n k$, $\beta_n = \sum_{k=0}^n k^2$ et $\gamma_n = \sum_{k=0}^n k^3$. Exprimer en fonction de α_n , β_n , γ_n et n les expressions suivantes :

$$a) \quad \sum_{k=1}^n (k^2 - 5k + 1) = \sum_{k=1}^n k^2 - 5 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = \beta_n - 5\alpha_n + n$$

$$b) \quad \sum_{k=1}^n (1 - k)^2 = \sum_{k=1}^n (1 - 2k + k^2) = \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = \beta_n - 2\alpha_n + n$$

$$c) \quad \sum_{k=0}^n k(k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (k^3 - 2k^2 + k) = \sum_{k=1}^n k^3 - 2 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \gamma_n - 2\beta_n + \alpha_n$$