

Programme de colle TS 1 // semaine 2 du 25/09 au 30/09

I Sommes et produits

- ☞ Notation et définition $\sum$ et $\prod$.
- ☞ Linéarité de $\sum$ (exercice 7 du cours)
- ☞ Changement d'indice :



Méthode 1

1. On exprime le nouvel indice en fonction de l'ancien puis inversement.
2. On détermine les nouvelles bornes et l'expression à sommer en fonction du nouvel indice.

- ☞ **Télescopage** : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ou complexes et m et n deux entiers tel que $m \leq n$, alors :

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$$



Méthode 2

La méthode par télescopage consiste à :

1. Reconnaître une expression de la forme $u_{k+1} - u_k$ et l'expression de u_k
2. Puis à appliquer la formule précédente.

- ☞ Une factorisation (où $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$$

- ☞ Conséquence, si $q \neq 1$:

$$1 + q + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

II Sommes et premières récurrences

- ☞ Principe de récurrence



Attention 1. uniquement appliqué aux sommes!!!

- ☞ Sommes de référence :

$$\star \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\star \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\star \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

- ☞ Coefficients binomiaux

★ Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

★ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a les propriétés :

$$\begin{aligned}
& \bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\
& \bullet \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n & \bullet \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}
\end{aligned}$$

☞ Formule du binôme : Soient a et b deux réels et n un entier naturel : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

III Éléments de cours à connaître

1. Démonstration de :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$$

(a) Démonstration par changement d'indice

(b) Démonstration par télescopage

2. Apprendre la démonstration des trois sommes de références.

3. L'exemple de télescopage du cours : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

4. Démonstration des propriétés :

$$\begin{aligned}
& \bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\
& \bullet \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n & \bullet \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}
\end{aligned}$$

5. Savoir compléter :

$$\begin{aligned}
& \bullet \sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = \dots & \bullet \sum_{k=0}^n k^2 = \dots & \bullet \binom{n}{1} = \dots \\
& \bullet x^n - y^n = \dots & \bullet \sum_{k=0}^n k^3 = \dots & \bullet \binom{n}{k} = \dots \\
& \bullet 1 + q + \dots + q^n = \dots & \bullet \binom{n}{k} = \dots & \bullet \binom{n+1}{k+1} = \dots \\
& \bullet \sum_{k=0}^n k = \dots & \bullet \binom{n}{0} = \dots & \bullet (a+b)^n = \dots
\end{aligned}$$

6. **Facultatif** : démonstration de la formule du binôme du Newton par récurrence.