

Programme de colle TS 1 // semaine 3 (5) du 29/09 au 3/10

I Généralités sur les vecteurs

☞ Définition, multiplication par un réel, somme, propriétés algébriques...

☞ Définition d'une famille liée et d'une famille libre : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$.

□ Soient λ et μ deux réels. L'expression $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est appelée combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. (On peut généraliser cette définition à n vecteurs)

□ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. La famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ sera dite liée, si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

□ La famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ sera dite libre si elle n'est pas liée. C'est-à-dire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda, \mu) = (0, 0)$$

□ Nous pouvons généraliser les définitions précédentes à une famille de n vecteurs.



Attention 1. Une famille est un n -uplet composé de n vecteurs.

☞ Colinéarité de deux vecteurs : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront dit colinéaires si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{u} = \lambda\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda\vec{u}$$

Ceci est équivalent à dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.

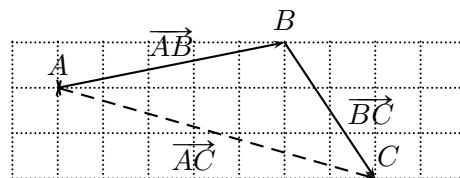
☞ Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. Alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est liée}$$

☞ Vecteurs et configuration : Relation de Chasles, Règle du parallélogramme...

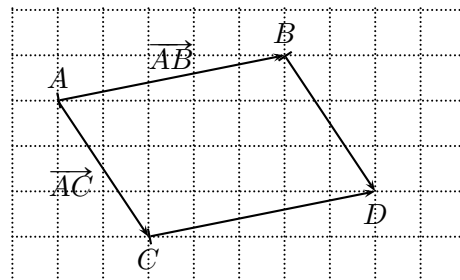
Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C de l'espace on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Règle du parallélogramme

Soit A, B et C trois points distincts. La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$, où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



II Bases

☞ Définition : dans le plan vectoriel, une famille libre de deux vecteurs est génératrice et c'est donc une base (c.a.d libre et génératrice)

☞ Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une **famille libre** de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Alors :

$$\forall \vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2, \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

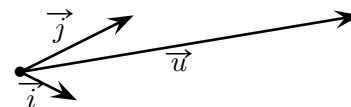
☞ On dit alors que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **famille génératrice** de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ puisque tout vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ peut être *généralisé* (c'est-à-dire *s'écrire comme combinaison linéaire de*) par $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

☞ Puisque $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une famille **libre et génératrice**, elle sera appelée une **base** de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

☞ Le couple (x, y) souvent noté $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (en colonne) pour les vecteurs sera appelé les **coordonnées cartésiennes** de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

☞ Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux alors la base $\mathcal{B}$ est dite **orthogonale**, si de plus ces deux vecteurs sont de norme 1 alors $\mathcal{B}$ est dite **orthonormée** (ou **orthonormale**)

☞ Si enfin la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ est positif la base est dite **directe** (elle sera dite **indirecte** sinon)



☞ Décomposition dans une base, combinaison linéaire...

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

$$\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

☞ Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base si l'on connaît les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne base.

☞ Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans l'ancienne base si l'on connaît les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne base. (exercice 7)

☞ Savoir décomposer dans une base.

☞ Calculs sur les coordonnées : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \text{ On a :}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

$$\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

III Géométrie repérée

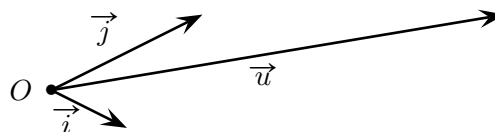
☞ Définition et proposition :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une famille libre de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et O un point de $\mathcal{P}$. Alors :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$. Le couple (x, y) est constitué des coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux alors le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit **orthogonal**, si de plus ces deux vecteurs sont de norme 1 alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit **orthonormé** (ou **orthonormal**) si enfin la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ est positif le repère est dit **direct** (elle sera dite **indirect** sinon)



☞ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$ tel que dans ce repère, on ait $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. On a :

$$\text{☞ } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

$$\text{☞ Si } I \text{ milieu de } [AB], I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

☞ Représentation paramétrique d'une droite : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$. Soit d la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (c'est que $\vec{u}$ est un vecteur non nul de même direction que d). Alors :

$$M(x, y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

On obtient alors la **représentation paramétrique** de d :

$$d : \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

IV Barycentres

☞ Définition, savoir construire un barycentre : uniquement pour deux ou trois points.

☞ Si G est le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$, alors pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \left(\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} \right)$$

V Éléments de cours à connaître

1. L'exercice 7 du cours (Si vous changez les valeurs, choisir des valeurs pour lesquelles les calculs sont simples). On considère le plan $\mathcal{P}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ (c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment une famille libre ou ne sont pas colinéaires). On considère $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
 - (a) Justifier que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}$.
 - (b) On a $\vec{w}$ et $\vec{n}$ ont pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ et $\vec{n}$ dans la base $\mathcal{B}$.
 - (c) On a $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ ont pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ dans la base $\mathcal{B}'$.
2. La *définition proposition* avec sa démonstration : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$. Soit d la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire $\vec{u}$ est un vecteur non nul de même direction que d). Alors :

$$M(x, y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

□ On obtient alors une **représentation paramétrique** de d :

$$d : \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

□ On obtient alors une équation cartésienne de la forme :

$$bx - ay + c = 0 \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

On détermine c en utilisant que $A \in d$.

3. Proposition avec sa démonstration : Soit $A, B, C \in \mathcal{P}$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Si G est le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$, alors pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC})$$

Vidéo du cas général pour ceux que cela intéressent.

4. Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ une famille libre de vecteurs de $\mathcal{P}$. Soient $\vec{e}_1 = 4\vec{u} - 3\vec{v}$ et $\vec{e}_2 = 2\vec{u} - \vec{v}$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre avec 2 méthodes différentes.
5. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.
 - (a) Déterminer un point A , un vecteur directeur et une équation cartésienne de la droite d de représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- (b) Donner la représentation paramétrique de la droite Δ passant par $B(1, -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- (c) Déterminer l'intersection entre d et Δ .