

Auto de révision du DS et géométrie plane.

Exercice 1

1. Simplifier les expressions suivants où $n \in \mathbb{N}^*$:

(a) $A = \frac{(n+2)!}{n!}$

(b) $B = \frac{(2n+2)!}{2 \times (2n)!}$

(c) $C = \binom{2n+1}{2}$

2. Calculer les sommes suivantes :

(a) $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 3^k (-2)^{5-k}$

(b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k$

(c) $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 5^k$

Exercice 2

Montrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (k-1)(k+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$

(On commencera l'initialisation à $n = 1$)

Exercice 3

1. Soit n est un entier naturel. Calculer la sommes : $\sum_{k=0}^n (k^2 + 2k + 1)$.

(On ne cherchera pas à simplifier l'expression obtenue.)

2. Autre méthode :

(a) Effectuer un changement d'indice pour compléter l'égalité $\sum_{k=0}^n (k^2 + 2k + 1) = \sum_{\ell=1}^{\dots} \dots$

(On pourra remarquer que $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$)

(b) En déduire une autre expression sur forme factorisée de $\sum_{k=0}^n (k^2 + 2k + 1)$.

Exercice 4

On considère le plan $\mathcal{P}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ (c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forme une famille libre ou ne sont pas colinéaires).

On considère $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

1. Justifier que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}$.
2. On a $\vec{w}$ et $\vec{n}$ on pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ et $\vec{n}$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. On a $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ on pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 5

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

1. Déterminer un point A , un vecteur directeur et une équation cartésienne de la droite d de représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Donner la représentation paramétrique de la droite Δ passant par $B(1, -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer l'intersection entre d et Δ .

Exercice 6

(Facultatif) Soit ABC un triangle quelconque du plan. Soit D et E tels que $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{CE} = 2\vec{AC}$.

1. Expliquer pourquoi $\mathcal{B} = (\vec{AB}; \vec{AC})$ est une base du plan vectoriel.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{DC}$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que la famille $(\vec{BE}; \vec{DC})$ est liée.

Correction

Réponse de l'exercice 1

1. Simplifier les expressions suivants où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a) A = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

$$(b) B = \frac{(2n+2)!}{2 \times (2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2} = (n+1)(2n+1)$$

$$(c) C = \binom{2n+1}{2} = (2n+1)n$$

2. Calculer les sommes suivantes :

$$(a) \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 3^k (-2)^{5-k} = 1$$

$$(b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k = 4^n$$

$$(c) \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 5^k = 5^n - 1$$

Réponse de l'exercice 2

a) Montrer par récurrence $\sum_{k=1}^n (k-1)(k+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$

Voici les différentes étapes de la récurrence :

☞ **On pose l'hypothèse de récurrence** : $\mathcal{P}(n)$: " $\sum_{k=0}^n (k-1)(k+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$ „

☞ **Initialisation** : Pour $n = 1$:

$$\square \sum_{k=1}^1 (k-1)(k+1) = 0$$

$$\square \frac{1}{6} \times (1-1)(2 \times 1 + 5) = 0$$

☐ **Donc $\mathcal{P}(1)$ est vrai.**

☞ **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai.

$$\square \text{ c.a.d } \sum_{k=0}^n (k-1)(k+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

☐ **On veut démontrer** :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)(k+1) = \frac{1}{6}(n+1)n(2(n+1)+5) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) = \frac{1}{6}n(2n^2+9n+7)$$

☐ **Alors** :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)(k+1) = \sum_{k=1}^n (k-1)(k+1) + n(n+2)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n-1)(2n+5)}{6} + n(n+2) \\
&= \frac{1}{6}n[(n-1)(2n+5) + 6n + 12] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + 9n + 7]
\end{aligned}$$

□ On obtient donc bien $\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)(k+1) = \frac{1}{6}(n+1)n(2(n+1)+5)$

☞ **Conclusion :** Donc $\mathcal{P}(n+1)$. Nous avons démontré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n (k-1)(k+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

b) Obtenir le résultat précédent autrement que par récurrence.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (k-2)k &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k) \\
&= \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{6} \times (2n+1-6) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n-5)
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 3

Vidéo

1. Soit n est un entier naturel. Calculer la sommes :

$$\sum_{k=0}^n (k^2 + 2k + 1) = \sum_{k=0}^n k^2 + 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

2. Effectuer un changement d'indice pour compléter l'égalité

☞ On pose $\ell = k + 1$

$$\text{☞ Donc } \sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell^2$$

3. En déduire une autre expression sur forme factorisée de $\sum_{k=0}^n (k^2 + 2k + 1)$. (on remarquera que $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$)

$$\sum_{k=0}^n (k^2 + 2k + 1) = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Ceci en appliquant la formule $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ en $n+1$

Réponse de l'exercice 4

On considère le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ (c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forme une famille libre ou ne sont pas colinéaires).

On considère $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

1. Justifier que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est donc libre dans la plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (de dimension 2 donc). C'est donc bien une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

2. On a $\vec{w}$ et $\vec{n}$ on pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ et $\vec{n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\square \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \vec{u} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\square \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = 2\vec{u} + \vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

3. On a $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ on pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\square \text{ Comme } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} :$$

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - \vec{j} \\ \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 3\vec{i} \\ \vec{v} - 2\vec{u} = 3\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v}) \\ \vec{j} = \frac{1}{3}(\vec{v} - 2\vec{u}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\ \vec{j} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \end{cases}$$

$$\square \text{ Donc } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\square \text{ Pour } \vec{\beta} \text{ on a directement } \vec{\beta} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Réponse de l'exercice 5

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

1. Déterminer un point A et un vecteur directeur de la droite d de représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

L'on peut choisir $A(1, 1)$ et pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour l'équation cartésienne avec l'opération sur les ligne $2L_2 + L_1$ l'on obtient :

$$2y + x = 3 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0 \quad \text{équation cartésienne de } d$$

2. Donner la représentation paramétrique de la droite Δ passant par $B(1, -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\Delta : \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 3\lambda - 3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Déterminer l'intersection entre d et Δ .

□ L'on obtient avec l'équation cartésienne de d et la représentation paramétrique de Δ :

$$2\lambda + 1 + 2(3\lambda - 3) - 3 = 0 \Leftrightarrow 8\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

□ D'où les coordonnées du point d'intersection $(3, 0)$.

Réponse de l'exercice 6

Soit ABC un triangle quelconque du plan. Soit D et E tels que $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{CE} = 2\vec{AC}$.

1. Expliquer pourquoi $\mathcal{B} = (\vec{AB}; \vec{AC})$ est une base du plan vectoriel.

□ Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, la famille $\mathcal{B} = (\vec{AB}, \vec{AC})$ dans le plan vectoriel $\mathcal{P}$ (de dimension 2 donc). C'est donc bien une base de $\mathcal{P}$.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{DC}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\square \vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CE} = -\vec{AB} + \vec{AC} + 2\vec{AC} = -\vec{AB} + 3\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\square \vec{DC} = \vec{DA} + \vec{AC} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

3. Montrer que la famille $(\vec{BE}; \vec{DC})$ est liée.

□ Avec la question précédente $\vec{BE} = 3\vec{DC}$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires et donc la famille $(\vec{BE}; \vec{DC})$ est liée.