Devoir surveillé 2
Physique-Chimie | TSI1

Thème(s) : optique - électrocinétique
Durée : 2 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats ;
- Ne pas utiliser de **correcteur** ;
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition ;
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom ;
- Les applications numériques seront faites avec un nombre adapté de chiffres significatifs.

Les calculatrice sont **interdites**.

Le sujet est composé de **3 parties** qui peuvent être traitées indépendamment. Si besoin, le candidat pourra admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans les questions suivantes.

Exercice 1 : un circuit résistif

Dans un cinéma de réalité virtuelle, tous les spectateurs voient en même temps le même film dans leur casque. De manière extrêmement simplifiée, on modélise la salle par une association de N casques de résistance d'entrée R, devant tous être alimentés par un même générateur idéal de force électromotrice e. Cependant, la tension et le courant délivrés par le générateur ne doivent pas dépendre du nombre de casques actifs : il faut pouvoir voir le film même si la salle n'est pas pleine et que certains casques sont éteints.

Cela signifie que la résistance équivalente à l'association des N casques allumés ne doit pas dépendre de N.

Rappel : la puissance électrique consommée par un dipôle résistif traversé par un courant i est $P = R \times i^2$.

Association en série ou en parallèle

1 En raisonnant sur la puissance consommée, justifier en deux lignes maximum qu'il est raisonnable de modéliser un casque éteint par un interrupteur ouvert. En déduire qu'associer les casques en série ne peut convenir.

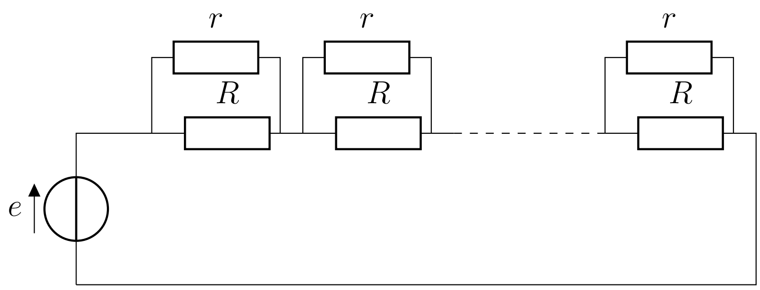
Plutôt qu'associer les casques en série, on envisage de les associer en parallèle.

2 Donner la résistance équivalente à l'ensemble des N casques.

3 Justifier que ce type d'association ne convient pas non plus.

Association avec résistances de shunt

Une autre solution envisagée est d'associer les casques en série, mais en ajoutant résistance r de "shunt"[1] en parallèle à chaque casque.



4 Justifier dans ce cas, qu'un casque éteint ne perturbe pas le fonctionnement des autres casques.

5 Donner la résistance équivalente pour une association de 2 casques puis de 3 casques.

6 Donner la résistance équivalente pour une association de N casques.

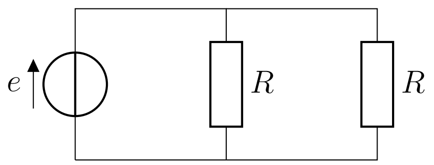
7 Existe-t-il une valeur de r pour que la résistance équivalente ne dépende pas de N ? Si oui, déterminer cette valeur en fonction de R. Sinon conclure sur cette méthode.

Association mixte

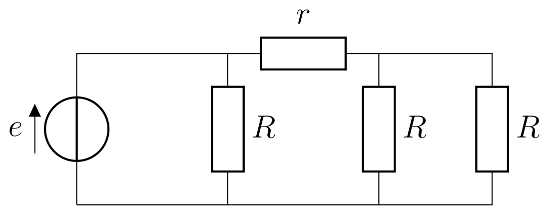
Un schéma d'association plus astucieux est représenté figure ci-dessous : les casques aux extrémités sont montés en parallèle et tous les casques intercalés entre eux sont accompagnés d'une résistance r, que l'on cherche à déterminer.

1. shunt = dérivation

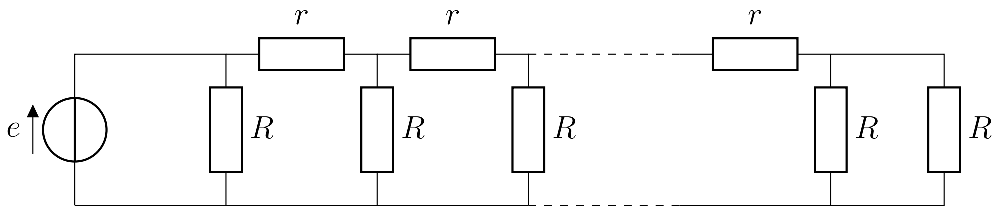
Cas pour deux casques :



Cas pour trois casques :



Cas pour N casques :



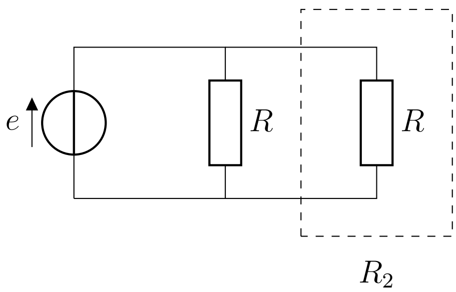
8 Donner la résistance équivalente à l'association de deux casques.
9 Montrer que l'association de trois casques à pour résistance équivalente :

$$R_{\text{eq}} = \frac{R(R/2 + r)}{3R/2 + r}$$

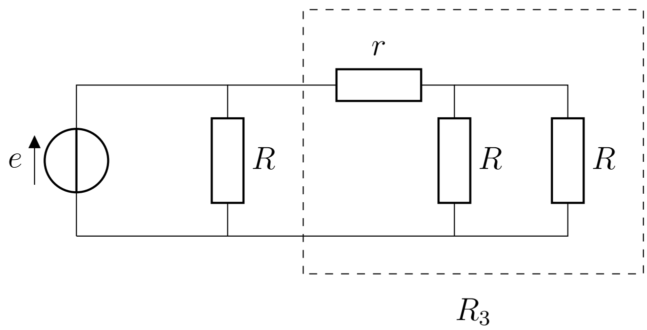
10 En déduire la valeur de r en fonction de R pour que l'association de trois casques soit équivalente à l'association de deux casques.

Nous souhaitons maintenant généraliser ce raisonnement à N casques. Le calcul de la résistance équivalente n'est pas faisable directement, nous proposons de raisonner par récurrence. Nous définissons R_N la résistance équivalente à l'association de $N-1$ casques les plus éloignés du générateur (tous les casques sauf le premier) selon les schémas ci-dessus.

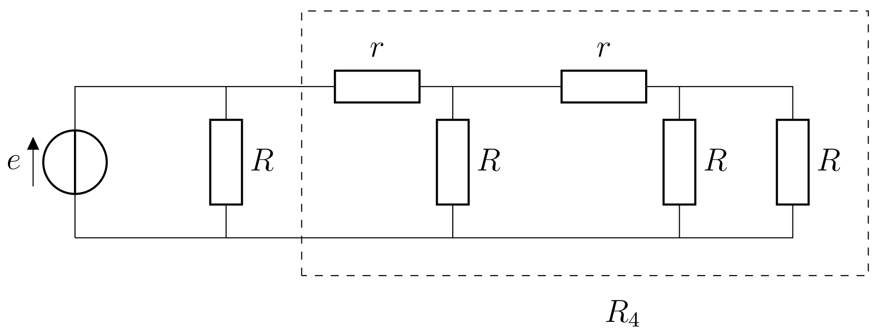
Pour N = 2 :



Pour N = 3 :



Pour N = 4 :

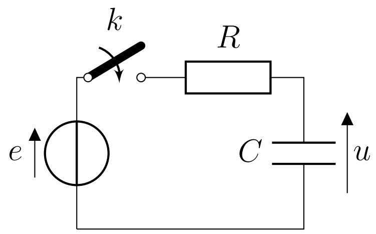


11 Exprimer R_4 en fonction de R_3, R et r.
12 En déduire que pour une association de quatre casques, la résistance r doit vérifier $r = R/2$ pour que la résistance équivalente ne dépende pas de $N = 4$.
13 Exprimer la résistance équivalente R_N en fonction de la résistance équivalente R_{N-1}.
14 En procédant par récurrence, montrer que $\forall N$, $r = R/2$ pour que la résistance équivalente de tous les casques ne dépende pas de N.

Exercice 2 : charge et décharge d'un condensateur

Réponse à un échelon de tension

Nous étudions la charge et la décharge d'un condensateur de capacité C dans le circuit ci-dessous :



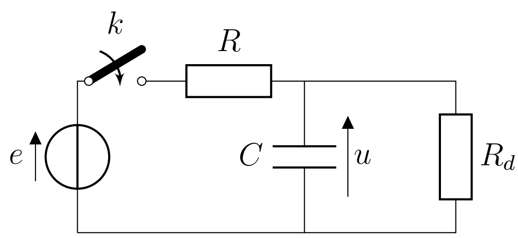
Le générateur de tension idéal fournit une tension constante $e(t) = E$. Après que le circuit soit resté longtemps ouvert, nous fermons l'interrupteur à l'instant $t = 0$. La charge initiale du condensateur est nulle : $Q(0) = 0$.

Nous introduisons la constante de temps $\tau = RC$ pour simplifier les expressions.

15 Déterminer la valeur de la tension aux bornes du condensateur juste après la fermeture de l'interrupteur $u(t = 0^+)$.
16 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur pour $t > 0$.
17 Résoudre cette équation différentielle et déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$ en fonction de E, τ et t.
18 Tracer l'évolution temporelle de $u(t)$.

Ajout d'une résistance de décharge

Nous modifions le circuit précédent afin de lui ajouter une résistance de décharge, comme sur la figure ci-dessous.



Le générateur de tension idéal fournit une tension constante $e(t) = E$. Après que le circuit soit resté longtemps ouvert, nous fermons l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

Nous ne connaissons pas la charge initiale du condensateur : $Q(0)$ est à priori inconnue.

Nous introduisons les constantes de temps $\tau = RC$ et $\tau_d = R_dC$ pour simplifier les expressions.

19 Déterminer la valeur de la tension aux bornes du condensateur juste après la fermeture de l'interrupteur $u(t = 0^+)$.
20 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur pour $t > 0$ est :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_d}\right) = \frac{E}{\tau}$$

21 Résoudre cette équation différentielle et déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$ en fonction de E, τ, τ_d et t.
22 Tracer l'évolution temporelle de $u(t)$.

Lorsque le condensateur est complétement chargé, on ouvre l'interrupteur à l'instant $t = t_1 = 5\frac{\tau\tau_d}{\tau + \tau_d}$. Nous introduisons une nouvelle échelle des temps, ayant pour origine l'instant t_1 : $t^* = t - t_1$.
23 Déterminer la valeur de la tension aux bornes du condensateur juste après l'ouverture de l'interrupteur $u(t^* = 0+)$.
24 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t^*)$ aux bornes du condensateur pour $t^* > 0$:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t^*} + \frac{u}{\tau_d} = 0$$

25 Résoudre cette équation différentielle et déterminer l'expression de $u(t^*)$ pour $t^* > 0$ en fonction de E, τ, τ_d, et t^*.
26 Tracer l'évolution temporelle de $u(t)$. Attention, nous souhaitons tracer l'évolution de $u(t)$ pour t allant de 0 à une valeur supérieure à t_1.

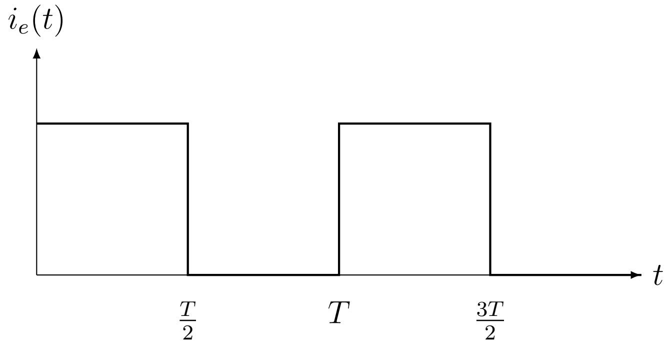
Pilotage externe de l'interrupteur

Nous travaillons sur le même circuit que précédemment, avec la résistance de décharge. L'interrupteur k est maintenant piloté par un signal externe de période T tel que :

$$k(t) = \begin{cases} \text{fermé} & \text{pour } nT \leq t < nT + T/2 \\ \text{ouvert} & \text{pour } nT + T/2 \leq t < (n+1)T \end{cases}$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi le courant i_e dans la branche du générateur de tension est tel que :



Le condensateur est initialement déchargé, ainsi $u(t = 0) = 0$. Les équations différentielles déterminées précédemment restent valables :

$$\text{fermé :} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_d}\right) = \frac{E}{\tau}$$

$$\text{ouvert :} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau_d} = 0$$

27 Déterminer une condition doit-être la période T en fonction de τ et τ_d pour que le condensateur ait le temps de se charger ou de se décharger complètement durant une demi-période ?

Nous nous plaçons dans le cas où : $T = 2\dfrac{\tau_d \tau}{\tau + \tau_d}$.

Nous donnons que $\exp(-1) \approx 0,37$.

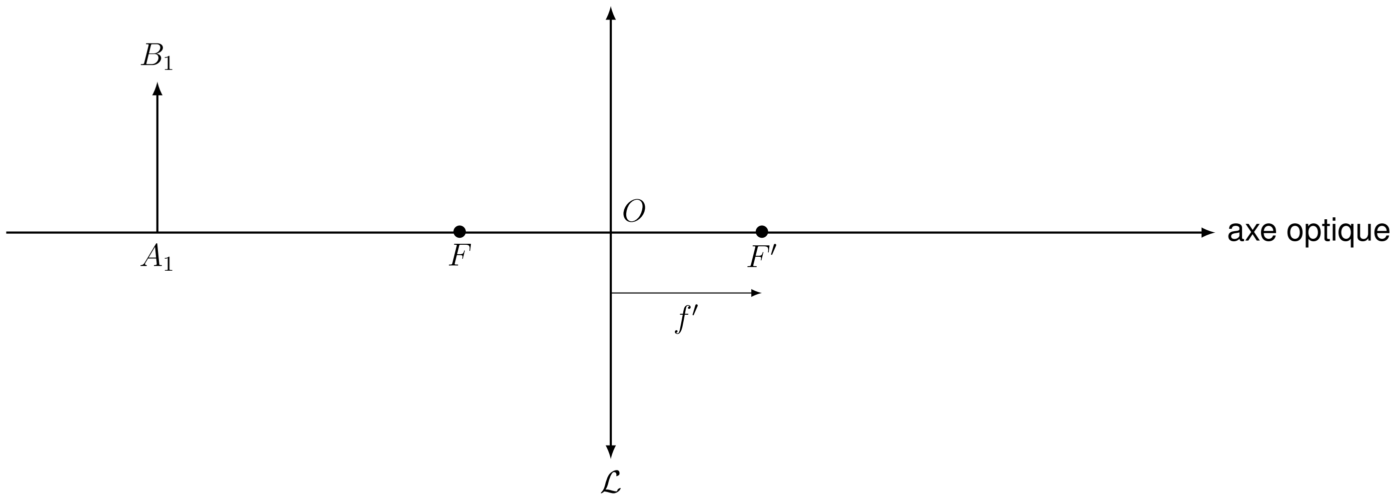
28 Déterminer la tension u aux bornes du condensateur à l'instant $t = T/2$ à la fin de la première charge.

29 Déterminer la tension u aux bornes du condensateur à l'instant $t = T$ à la fin de la première décharge.

30 Sans résoudre la suite des périodes, tracer qualitativement l'allure de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur sur plusieurs périodes. Commenter.

Exercice 3 : grandissement longitudinal d'une lentille

On considère une lentille mince convergente de focale f'.



31 Sur la figure 1 de l'annexe, un objet A_1B_1 est placé. Déterminer, par un tracé de rayon, son image $A_1'B_1'$.

32 Rappeler la relation de conjugaison de *Descartes* pour une lentille mince.

33 Rappeler la définition du grandissement transversal γ_T et donner son expression dans le cas d'une lentille mince.

34 Dans le cas où l'objet A_1B_1 est placé à la distance $\overline{OA_1} = -3/2f'$, déterminer la position de son image $A_1'B_1'$.

35 Déterminer alors le grandissement transversal $\gamma_{T,1}$.

36 Vérifier la cohérence de votre résultat avec le tracé de la figure 1.

Le grandissement longitudinal γ_L d'une lentille quantifie le déplacement de l'image le long de l'axe optique quand l'objet se déplace le long de cet axe. Ainsi, si un objet est déplacé d'une position A_1 à une position A_2, $\gamma_L = \dfrac{\overline{A_2'A_1'}}{\overline{A_1A_2}}$. Ainsin de manière équivalente au grandissement transversal, le grandissement longitudinal compare la longueur relative d'un objet situé sur l'axe optique à celle de son image. Il ne doit pas être confondu avec le grandissement transversal qui compare les hauteurs relatives d'un objet et d'une image perpendiculaires à l'axe optique.

37 En complétant la figure 2 en annexe, construire de deux couleurs différentes les images $A_1'B_1'$ de l'objet A_1B_1 et $A_2'B_2'$ de l'objet A_2B_2.

Nous donnons la relation de conjugaison de Newton pour une lentille mince :

$$\overline{FA}\,\overline{F'A'} = f'^2$$

où A est la position de l'objet et A' la position de son image, F le foyer objet et F' le foyer image.

38 Justifier à partir de la relation de conjugaison de Newton mais sans calcul compliqué que le grandissement longitudinal est toujours positif. Pour faciliter le raisonnement, on se limitera au cas d'un objet réel donnant une image réelle.

39 En écrivant deux fois la relation de conjugaison de Descartes, montrer que :

$$\gamma_L = \gamma_{T_1}\gamma_{T_2}$$

où γ_T désigne le grandissement transversal dans les positions 1 et 2 de l'objet.

40 Vérifier la cohérence du résultat avec le tracé de la figure 2.

Annexe Feuille à rendre avec la copie.

Nom :	Prénom :

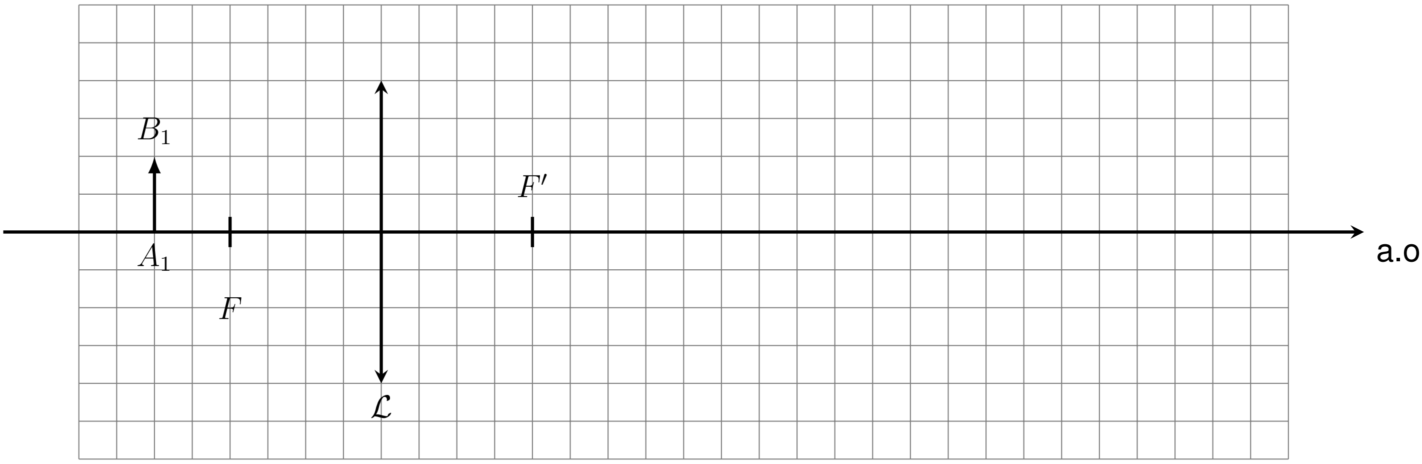


FIGURE 1 – Tracé de rayons pour la détermination l'image $A_1'B_1'$ à partir de l'objet A_1B_1.

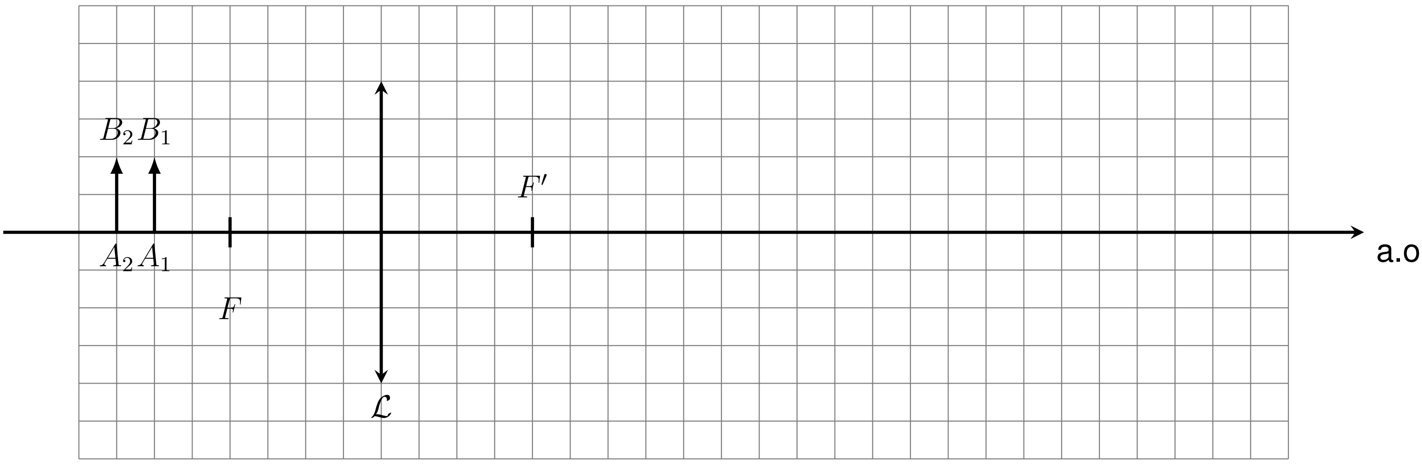


FIGURE 2 – Tracé de rayons pour la détermination des images $A_1'B_1'$ et $A_2'B_2'$ à partir des objets $A_1'B_1'$ et A_2B_2.