DS n°2 : proposition de corrigé.

Association en série ou en parallèle

1. En raisonnant sur la puissance consommée, justifier en deux lignes maximum qu'il est raisonnable de modéliser un casque éteint par un interrupteur ouvert. En déduire qu'associer les casques en série ne peut convenir.

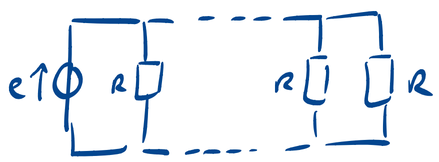
Plutôt qu'associer les casques en série, on envisage de les associer en parallèle.

2. Donner la résistance équivalente à l'ensemble des N casques.
3. Justifier que ce type d'association ne convient pas non plus.

1 $P = R i^2$ • or si le casque éteint est un interrupteur ouvert, $P = 0$.

• si les casques sont associés en série $i = 0$ pour tous les casques, personne ne peut voir le film.

2



$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R} = \frac{N}{R}$$

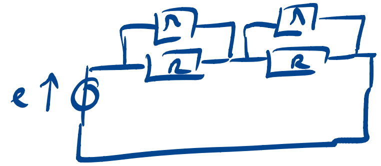
$$\boxed{R_{eq} = \frac{R}{N}}$$

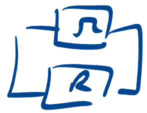
3 La résistance équivalente dépend de N le nombre de casque, ce n'est pas possible.

4. Justifier dans ce cas, qu'un casque éteint ne perturbe pas le fonctionnement des autres casques.
5. Donner la résistance équivalente pour une association de 2 casques puis de 3 casques.
6. Donner la résistance équivalente pour une association de N casques.
7. Existe-t-il une valeur de r pour que la résistance équivalente ne dépende pas de N ? Si oui, déterminer cette valeur en fonction de R. Sinon conclure sur cette méthode.

4 Un casque éteint se comporte comme un interrupteur ouvert, dans ce cas le courant passe dans la résistance de "shunt".

5





$\iff R_1 = \frac{R r}{R + r}$

Nous retrouvons 2 fois ce schéma en série, donc

$$\boxed{R_{eq_2} = \frac{2 R r}{R + r}}$$

De même pour 3 casques

$$\boxed{R_{eq_3} = \frac{3 R r}{R + r}}$$

6 De même qu'à la question précédente :

$$\boxed{R_{eq_N} = \frac{N R r}{R + r}}$$

7 Pour que $Req_2 = Req_3$, il faudrait avoir

$2 = 3$, ce qui est faux.

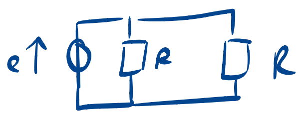
Il n'existe pas de résistance r qui rendent la résistance équivalente indépendante du nombre de casque. Cette méthode n'est pas envisageable.

[8] Donner la résistance équivalente à l'association de deux casques.
[9] Montrer que l'association de trois casques à pour résistance équivalente :

$$R_{\text{eq}} = \frac{R(R/2+r)}{3R/2+r}$$

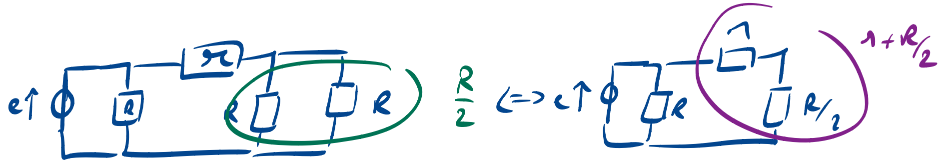
[10] En déduire la valeur de r en fonction de R pour que l'association de trois casques soit équivalente à l'association de deux casques.

8



$\boxed{Req_2 = \frac{R}{2}}$ (cf Q 2)

9



$\Leftrightarrow$

$$Req_3 = \frac{R(r + R/2)}{R + r + R/2}$$

$$\boxed{Req_3 = \frac{R(R/2 + r)}{\frac{3R}{2} + r}}$$

10 On veut $Req_2 = Req_3$

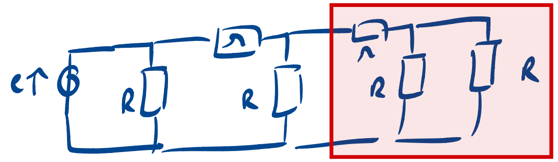
$$\frac{\cancel{R}}{\cancel{2}} = \frac{2\cancel{R}(R/2 + r)}{3R/2 + r}$$

$$\cancel{3}\frac{R}{2} + \cancel{r} = \cancel{R} + \cancel{2}r$$

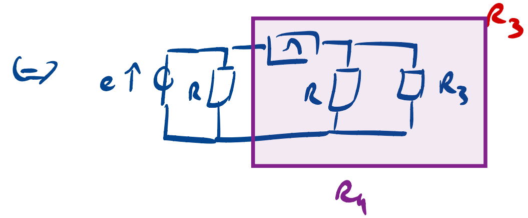
$$\boxed{r = \frac{R}{2}}$$

[11] Exprimer R_4 en fonction de R_3, R et r.
[12] En déduire que pour une association de quatre casques, la résistance r doit vérifier $r = R/2$ pour que la résistance équivalente ne dépende pas de $N = 4$.
[13] Exprimer la résistance équivalente R_N en fonction de la résistance équivalente R_{N-1}.
[14] En procédant par récurrence, montrer que $\forall N$, $r = R/2$ pour que la résistance équivalente de tous les casques ne dépende pas de N.

11



$\Leftrightarrow$



$$\boxed{R_4 = \frac{R R_3}{R + R_3} + r}$$

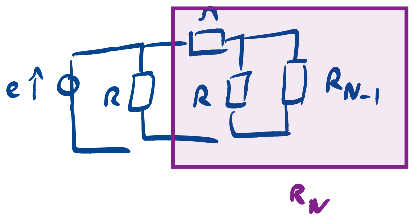
12 Pour que la résistance équivalente ne dépende pas du circuit, il faut que $R_4 = R_3$, de même $R_3 = R_2 = R$

pour 2 casques

On en déduit que $R_4 = R$ si les résistances sont équivalentes :

$$\frac{RR}{R+R} + r = R \iff \boxed{r = \frac{R}{2}}$$

13 Pour N casques, de la même façon qu'à la Q 11.



$$R_N = \frac{R\,R_{N-1}}{R + R_{N-1}} + r$$

14

<u>initialisation</u> pour 3 casques $r = R/2$

<u>hérédité</u>, supposons qu'au rang $N-1$, $r = R/2$, montrons que c'est vrai au rang N :

si $r = R/2 \Rightarrow R_{N-1} = R$ (cf Q 12)

d'où $R_N = \dfrac{R^2}{2R} + r = R$

$$\iff \boxed{r = R/2}$$

<u>Conclusion</u> par récurrence, la propriété est vraie à tout rang N.

Exercice 2 : Charge / décharge

[15] Déterminer la valeur de la tension aux bornes du condensateur juste après la fermeture de l'interrupteur $u(t = 0^+)$.
[16] Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur pour $t > 0$.
[17] Résoudre cette équation différentielle et déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$ en fonction de E, τ et t.
[18] Tracer l'évolution temporelle de $u(t)$.

[15] $u(t=0^+) = u(t=0^-)$ par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.

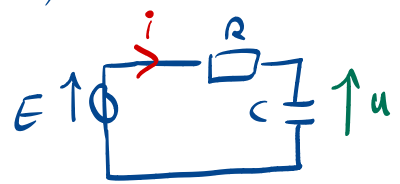
Cherchons $u(t=0^-)$. $Q(0^-) = 0$

or $Q = Cu$

donc $u(0^-) = 0$ ainsi $\boxed{u(0^+) = 0}$

Rq pour alléger les notations nous notons $u(t=0^-) = u(0^-)$.

[16] $\forall t > 0$, le schéma est le suivant :



Loi des mailles $E = Ri + u$ $\quad i = C\dfrac{du}{dt}$

(ED) $\boxed{\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}}$

[17] Je reconnais une équat° différentielle d'ordre 1 :

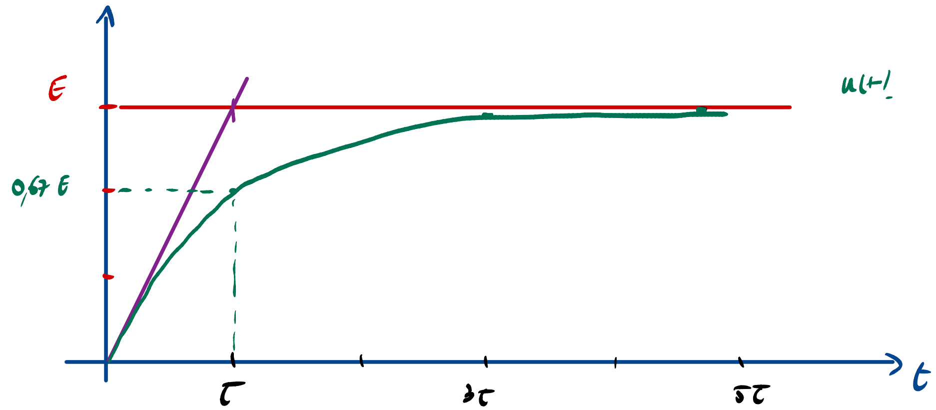
- solut° homogène $u_h = k\exp(-t/\tau)$ avec $k \in \mathbb{R}$
- solut° particulière je cherche $u_p = c^{ste}$ dans l'(ED)

$\Rightarrow u_p = E$

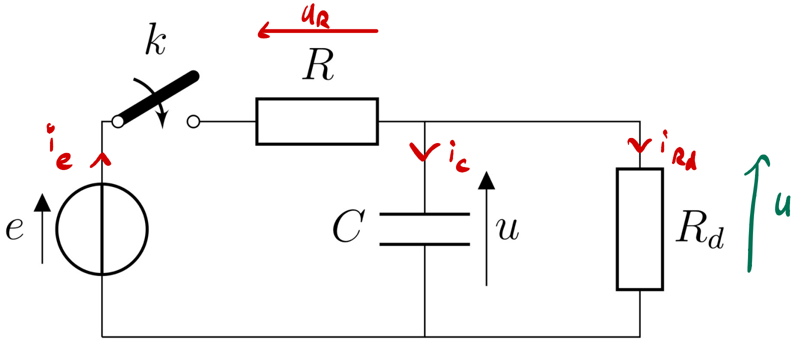
- solut° générales $u(t) = k\exp(-t/\tau) + E$ (SG)
- CI : $\underset{\uparrow \text{CI}}{u(0) = 0} \underset{\uparrow \text{SG}}{=} k + E \Leftrightarrow k = -E$

d'où $\boxed{u(t) = E\left(1 - \exp -t/\tau\right)}$

[18]



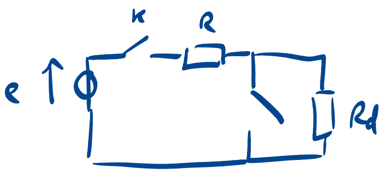
Ajout d'une résistance de décharge



(19) Déterminer la valeur de la tension aux bornes du condensateur juste après la fermeture de l'interrupteur $u(t = 0^+)$.

19 ⚠ nous ne connaissons pas $Q(t=0^-)$.

Schéma équivalent à $t=0^-$



$$\left.\begin{array}{l} i_e(0^-)=0 \\ i_c(0^-)=0 \end{array}\right\} \text{ ouvert}$$

$\Rightarrow$ LN $\quad i_{Rd}(0^-)=0$

Ainsi $u(0^-) = R_d\, i_{Rd}(0^-) = 0$

or $u(0^+) = u(0^-)$ par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur : $\boxed{u(0^+)=0}$

(20) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur pour $t > 0$ est :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_d}\right) = \frac{E}{\tau}$$

(21) Résoudre cette équation différentielle et déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$ en fonction de E, τ, τ_d et t.

(22) Tracer l'évolution temporelle de $u(t)$.

Lorsque le condensateur est chargé, on ouvre l'interrupteur à l'instant $t = t_1$.

(23) Déterminer la valeur de la tension aux bornes du condensateur juste après l'ouverture de l'interrupteur $u(t = t_1^+)$.

(24) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur pour $t > t_1$:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau_d} = 0$$

(25) Résoudre cette équation différentielle et déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t > t_1$ en fonction de E, τ, τ_d, t_1 et t.

(26) Tracer l'évolution temporelle de $u(t)$.

20 LN. $\quad i_e = i_c + i_{Rd}$

$$i_e = c\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_d}$$

LM à gauche :

$$E = Ri_e + u \iff i_e = \frac{E-u}{R}$$

d'où $\quad \dfrac{E-u}{R} = c\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{R_d}$

$$\frac{du}{dt} + u\left(\frac{1}{R_dC} + \frac{1}{RC}\right) = \frac{E}{RC}$$

$$\boxed{\frac{du}{dt} + u\left(\frac{1}{\tau_d} + \frac{1}{\tau}\right) = \frac{E}{\tau}}$$

21 Je pose $\dfrac{1}{\tau'} = \dfrac{1}{\tau_d} + \dfrac{1}{\tau} \iff \tau' = \dfrac{\tau_d\tau}{\tau_d+\tau}$

Je reconnais la même équat° qu'à la Q 17, dans les mêmes conditions

dont la solut° est

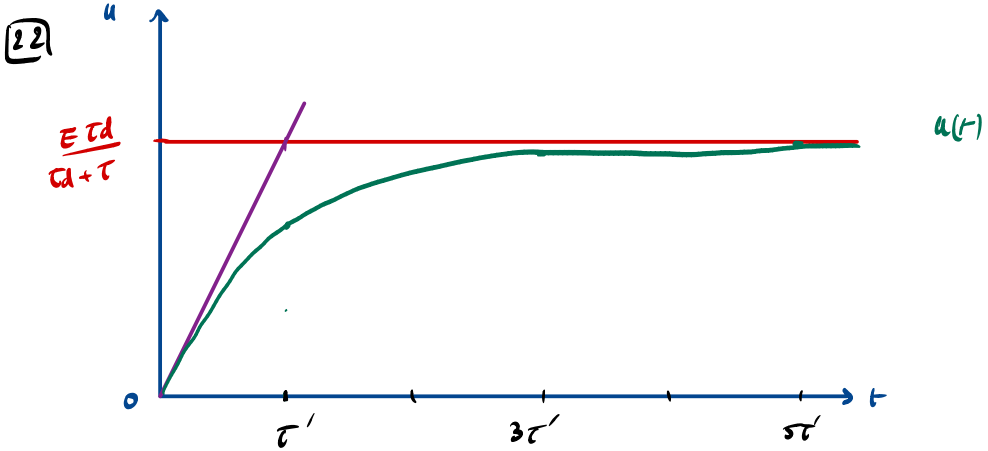
$$u(t) = k\exp\left(\frac{-t}{\tau'}\right) + \frac{E\tau'}{\tau} \quad \text{(S.G.)}$$

C.I. $\quad \underset{\uparrow \text{ CI}}{u(0)} = 0 \underset{\uparrow \text{ SG}}{=} k + E\frac{\tau'}{\tau} \Leftrightarrow k = -\frac{E\tau'}{\tau}$

d'où $\quad u(t) = \frac{E\tau'}{\tau}\left(1 - \exp\left(-t/\tau'\right)\right)$

$$\boxed{u(t) = \frac{E\tau_d}{\tau+\tau_d}\left(1 - \exp\left(-t/\tau'\right)\right)}$$

22



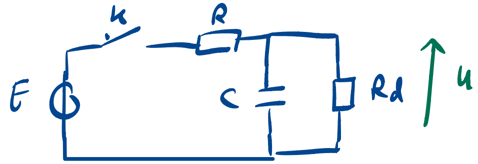
23 La condensateur est chargé à $t^* = 0^-$, donc

$$u(t^* = 0^-) = \frac{E\tau_d}{\tau_d+\tau}$$

par continuité de tension aux bornes d'un condensateur $u(t_1^+) = u(t_1^-)$

donc $u(t^* = 0^+) = \frac{E\tau_d}{\tau+\tau_d}$

24 Schéma en $t^* > 0$



L.N. $\quad \underbrace{\cancel{i_e}}_{\to 0 \text{ car ouvert}} = i_c + i_d \Leftrightarrow C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_d} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{du}{dt^*} + \frac{u}{\tau_d} = 0}$$

25 Je reconnais une équat° différentielle homogène, donc

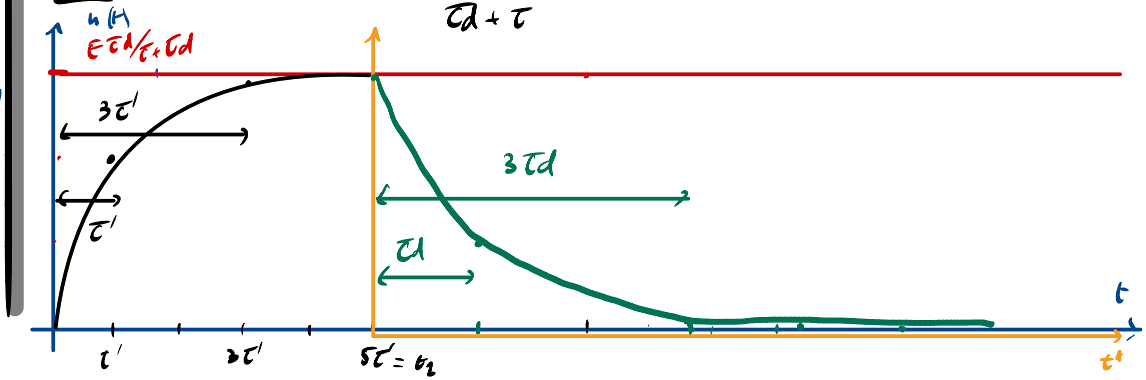
$$u(t^*) = k\exp\left(-t^*/\tau_d\right) \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

déterminons k : $\quad \underset{\uparrow \text{ CI}}{u(t^*) =} \frac{E\tau_d}{\tau+\tau_d} \underset{\uparrow \text{ SG}}{=} k$

d'où $\quad k = \frac{E\tau_d}{\tau+\tau_d}$

au final $\quad \boxed{u(t^*) = \frac{E\tau_d}{\tau+\tau_d}\exp\left(\frac{-t}{\tau_d}\right)}$

26 Rq : $\quad \tau' = \frac{\tau_d\tau}{\tau_d+\tau} < \tau_d$



Pilotage externe de l'interrupteur

27 Déterminer une condition doit-être la période T en fonction de τ et τ_d pour que le condensateur ait le temps de se charger ou de se décharger complètement durant une demi-période ?

27 D'après les équat° différentielles, les temps caractéristiques sont

$$\begin{cases} \tau' = \dfrac{\tau_d \tau}{\tau + \tau_d} & \text{pour le cas fermé} \\ \tau_d & \text{pour le cas ouvert} \end{cases}$$

Pour que le condensateur ait le temps de se chargé et déchargé complètement, il faut que $\begin{cases} T/2 \gg \tau' \\ T/2 \gg \tau_d \end{cases}$ et

or $\tau' < \tau_d$, en effet $\tau' = \dfrac{\tau \tau_d}{\tau + \tau_d} = \tau_d \underbrace{\dfrac{\tau}{\tau + \tau_d}}_{<1}$

$$0 < \frac{\tau}{\tau + \tau_d} < 1 \quad \Big\downarrow \times \tau_d$$

$$0 < \tau' < \tau_d$$

Ainsi pour observer la charge / décharge complète, il faut $\boxed{T/2 \gg \tau_d}$

28 Déterminer la tension u aux bornes du condensateur à l'instant $t = T/2$ à la fin de la première charge.

29 Déterminer la tension u aux bornes du condensateur à l'instant $t = T$ à la fin de la première décharge.

30 Sans résoudre la suite des périodes, tracer qualitativement l'allure de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur sur plusieurs périodes.

28 D'après la Q 21.

$$u(t) = \frac{E \tau_d}{\tau + \tau_d}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right)$$

en $t = T/2$ $\quad u(T/2) = \dfrac{E \tau_d}{\tau + \tau_d}\left(1 - \exp \dfrac{-T}{2\tau'}\right)$ avec $\tau' = \dfrac{\tau_d \tau}{\tau_d + \tau}$

$$u(T/2) = \frac{E \tau_d}{\tau + \tau_d}\left(1 - \exp(-1)\right)$$

$\boxed{u(T/2) = 0{,}63\ E_{max}}$ avec $E_{max} = \dfrac{E \tau_d}{\tau + \tau_d}$

29 Nous définissons une nouvelle origine des temps en $t = T/2$,

$$t^* = t - T/2$$

en $t^* = 0$, $\quad u(t^* = 0^+) = u(t^* = 0^-)$ par continuité (cf Q 23)

d'où $u(T/2^+) = 0{,}67\ E_{max}$.

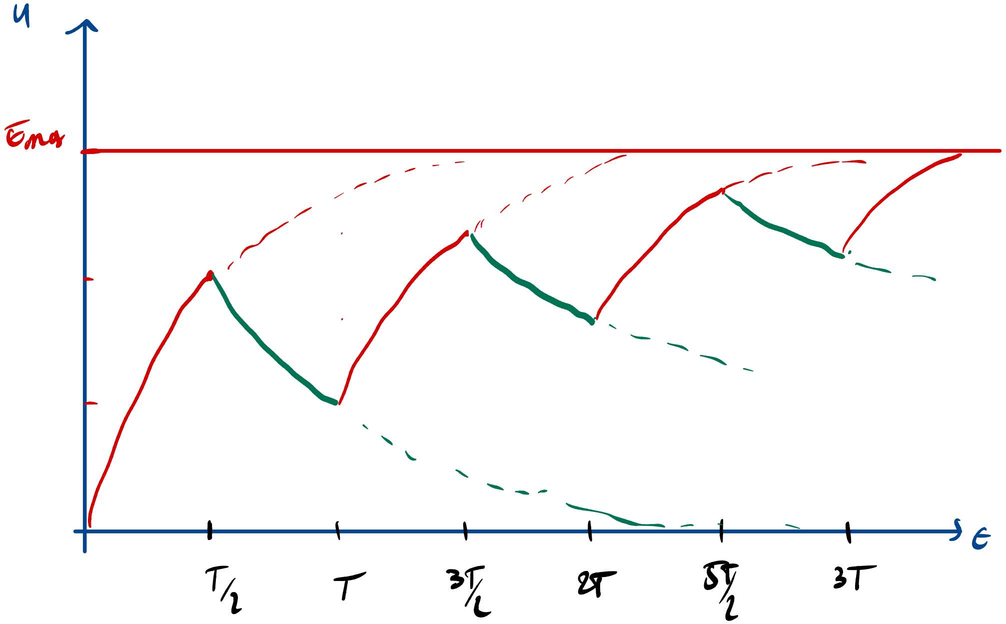
D'après la Q 25 $\quad u(t^*) = 0{,}67\ E_{max} \exp\left(-\dfrac{t^*}{\tau_d}\right)$

$$u(t^* = T/2) = 0{,}67\ E_{max} \exp\left(\frac{-T}{2\tau_d}\right)$$

$$u\left(t^*=\frac{T}{2}\right) = 0{,}67\, E_{max} \exp\left(-\frac{\cancel{2}\,\cancel{\tau_d}\,\tau}{\cancel{2}(\tau_d+\tau)\cancel{\tau_d}}\right)$$

$$\boxed{u\left(t^*=\frac{T}{2}\right) = 0{,}67\, E_{max} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_d+\tau}\right)}$$

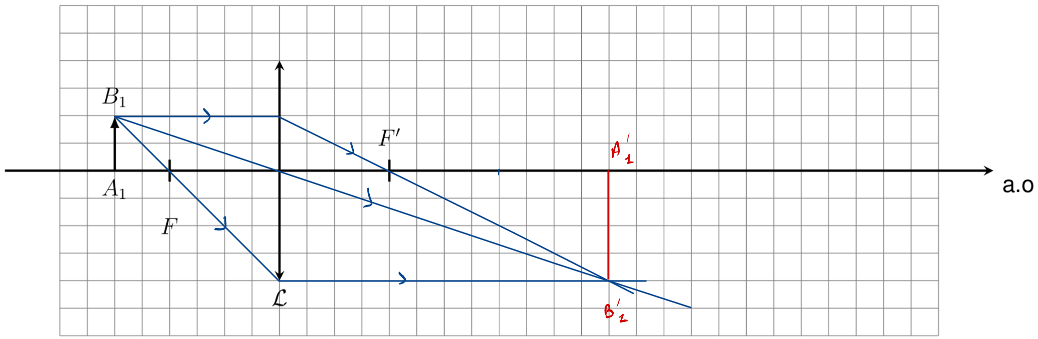
30



Le condensateur se charge plus qu'il n'a le temps de se décharger, au bout de plusieurs cycles il reste complètement chargé à $\boxed{U = E_{max} = \dfrac{E\,\tau_d}{\tau_d+\tau}}$

Exercice 3 γ_L

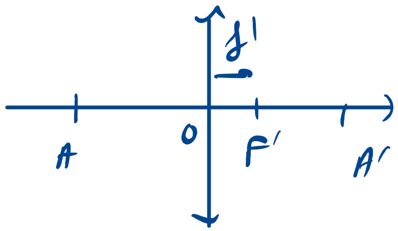
$\boxed{31}$



$\boxed{32}$ Rappeler la relation de conjugaison de *Descartes* pour une lentille mince.
$\boxed{33}$ Rappeler la définition du grandissement transversal γ_T et donner expression dans le cas d'une lentille mince.
$\boxed{34}$ Dans le cas où l'objet A_1B_1 est placé à la distance $\overline{OA_1} = -3f'$, déterminer la position de son image $A'_1B'_1$.
$\boxed{35}$ Déterminer alors le grandissement transversal $\gamma_{T,1}$.
$\boxed{36}$ Vérifier la cohérence de votre résultat avec le tracé de la figure 1.

$\boxed{32}$ pour une lentille de centre O, d'image A' et d'objet A, et de focale f'

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}} \quad (RCD)$$



$\boxed{33}$ $\gamma_T = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ par définition

$\gamma_T = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ pour une lentille (dem à partir de Thalès)

$\boxed{34}$ $\overline{OA_1} = -\frac{3}{2}f'$

(RCD) $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{\overline{OA'_1}} + \dfrac{2}{3f'}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\overline{OA'_1}} = \dfrac{1}{f'} - \dfrac{2}{3f'} = \dfrac{1}{3f'}$

$\Leftrightarrow \boxed{\overline{OA'_1} = 3f'}$

$\boxed{35}$ $\gamma_T = \dfrac{\overline{OA'_1}}{\overline{OA_1}} = \dfrac{\overline{A'_1B'_1}}{\overline{A_1B_1}} \Leftrightarrow \overline{A'_1B'_1} = \dfrac{3\cancel{f'}}{-\frac{3}{2}\cancel{f'}}\,\overline{A_1B_1}$

d'où $\boxed{\overline{A'_1B'_1} = -2\,\overline{A_1B_1}}$

L'image est renversée et 2 fois plus grande.

$\boxed{36}$ Sur la figure ①, en annexe, l'image est située à $3f'$, renversée et 2 fois plus grandes que l'objet.

(37) En complétant la figure 2 en annexe, construire de deux couleurs différentes les images $A_1'B_1'$ de l'objet A_1B_1 et $A_2'B_2'$ de l'objet A_2B_2.

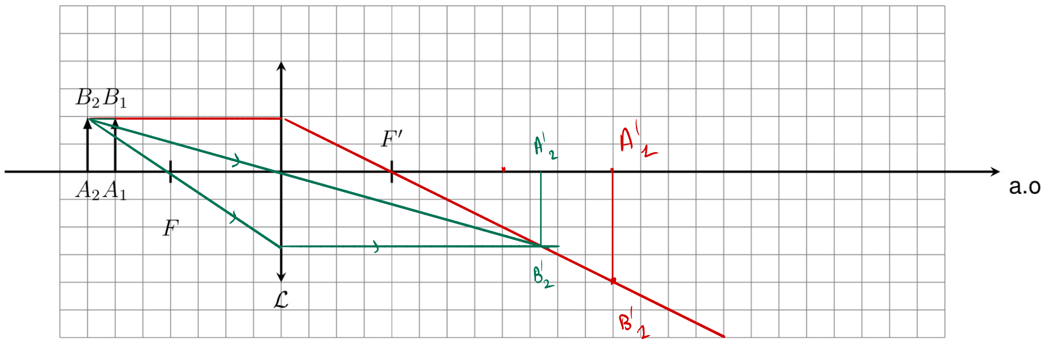


FIGURE 2 – Tracé de rayons pour la détermination des images $A_1'B_1'$ et $A_2'B_2'$ à partir des objets $A_1'B_1'$ et A_2B_2.

(38) Justifier à partir de la relation de conjugaison de Newton mais sans calcul compliqué que le grandissement longitudinal est toujours positif. Pour faciliter le raisonnement, on se limitera au cas d'un objet réel donnant une image réelle.

(39) En écrivant deux fois la relation de conjugaison de Descartes, montrer que

$$\gamma_L = \gamma_{T_1}\gamma_{T_2}$$

, où γ_T désigne le grandissement transversal dans les positions 1 et 2 de l'objet.

(40) Vérifier la cohérence du résultat avec le tracé de la figure 2.

38

$$\overline{FA_1} \times \overline{FA_1'} = f'^2$$

$$\overline{FA_2} \times \overline{FA_2'} = f'^2$$

d'où $\overline{FA_1} \times \overline{FA_1'} = \overline{FA_2} \times \overline{FA_2'}$

$$\frac{\overline{FA_1}}{\overline{FA_2}} = \frac{\overline{FA_2'}}{\overline{FA_1'}}$$

Comme A_1 est après A_2 $(\overline{A_2A_1} > 0)$

$$\overline{FA_2} < \overline{FA_1} \iff 1 < \frac{\overline{FA_1}}{\overline{FA_2}}$$

donc $1 < \dfrac{\overline{FA_1}}{\overline{FA_2}} = \dfrac{\overline{FA_1'}}{\overline{FA_2'}}$

$$\iff \overline{FA_2'} < \overline{FA_1'}$$

$$\cancel{\overline{FA_1'}} + \overline{A_1'A_2'} < \cancel{\overline{FA_1'}}$$

$$\boxed{\overline{A_1'A_2'} < 0}$$

donc $A_1'A_2'$ est orienté dans le même sens que $\overline{A_1A_2}$.

39

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{\overline{OA_1'}} - \dfrac{1}{\overline{OA_1}} \\ \dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{\overline{OA_2'}} - \dfrac{1}{\overline{OA_2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA_1'}} - \frac{1}{\overline{OA_2'}} = \frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA_2}}$$

$$\frac{\overbrace{\overline{OA_2'}}^{-\overline{A_2'O}} - \overline{OA_1'}}{\overline{OA_2'}\,\overline{OA_1'}} = \frac{\overbrace{\overline{OA_2}}^{-\overline{A_2O}} - \overline{OA_1}}{\overline{OA_2}\,\overline{OA_1}}$$

$$\frac{\overline{A_2'A_1'}}{\overline{A_2A_1}} = \frac{\overline{OA_2'}}{\overline{OA_2}}\,\frac{\overline{OA_1'}}{\overline{OA_1}}$$

$$\boxed{\gamma_L = \gamma_{T_2}\gamma_{T_1}}$$

$\boxed{40}$ D'après la figure 2.

$$\gamma_{T_2} = -\frac{2,5}{2}$$ } je compte le nombre de carreaux.

$$\gamma_{T_1} = \frac{-4}{2}$$

donc $\gamma_{T_1}\gamma_{T_2} = +\frac{2,5\times \cancel{4}}{\cancel{4}} = +2,5$

et $\gamma_2 = \frac{2,5}{2} = 2,5$ je compte les carreaux d'écart.

Le résultat est en accord avec le tracé de la figure 2.