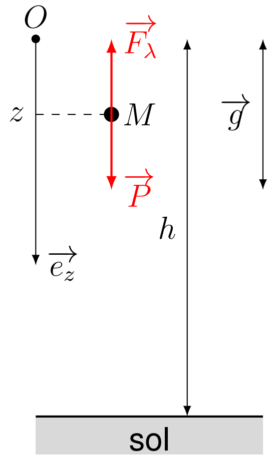
DM5 | correction | Mécanique

1



Système : Luke Aikins, supposé ponctuel de point M et de masse m. Référentiel : référentiel terrestre supposé galiléen. Bilan des forces :

- ⇝ Poids : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$;
- ⇝ Force de frottement fluide : $\overrightarrow{F_\lambda}$.

Application du principe fondamental de la dynamique :

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F_\lambda}$$

Le mouvement est rectiligne vertical, donc la vitesse s'écrit : $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{e_z}$. On projette le PFD sur l'axe $\overrightarrow{e_z}$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \lambda v^2$$

2 Deux méthodes : soit on résout et on regarde la vitesse en régime permanent, soit on cherche directement la vitesse limite en remarquant qu'à l'équilibre les forces se compensent. Il n'est pas possible de résoudre, car l'équation différentielle n'est pas linéaire.

$$0 = mg - \lambda v_L^2 \quad \Longrightarrow \quad v_L = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

3 On connait la vitesse maximale, qui est aussi la vitesse limite. Application numérique :

$$\lambda = \frac{mg}{v_L^2} = \frac{90 \times 9.81}{193^2/3.6^2} = 0{,}31\ \mathrm{kg\,m^{-1}}$$

4 Comme le problème est 1D :

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

On discrétise le temps avec un pas Δt. On note $t_i = i\Delta t$ et $z_i = z(t_i)$. On utilise une méthode d'Euler explicite pour la dérivée temporelle :

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_i} \approx \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t}$$
$$z_{i+1} = z_i + v_i\Delta t$$

5 De même qu'à la question précédente, on utilise une méthode d'Euler explicite pour la dérivée temporelle :

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_i} \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}$$

$$v_{i+1} = v_i + \left(g - \frac{\lambda}{m} v_i^2\right) \Delta t$$

6

```
# paramètres physiques
m = 90 # masse de Aikins (kg)  **À compléter**
g = 9.81 # pesanteur (m/s2).    **À compléter**
vl = 193/3.6 # vitesse limite (m/s).    **À compléter**
v0 = 0 # vitesse initiale (m/s)
h = 0 # altitude initiale par rapport à l'avion (m)

k = m*g/vl**2 # coefficient de frottement.   **À compléter**

# paramètres numériques (ne pas modifier)
dt = .02 # pas de temps (s)
tmax = 150 # durée de simulation (s)
t = np.arange(0,tmax,dt)

# initialisation
v = np.zeros(len(t))
z = np.zeros(len(t))
z[0] = h
v[0] = v0

# propagation
for i in range(1, len(t)):
    z[i] = z[i-1] + v[i-1]*dt       # **À compléter**
    v[i] = v[i-1] + (g - k*v[i-1]**2/m)*dt       # **À compléter**



# Tracé (ne pas modifier)
plt.subplot(211)
plt.plot(t, z, color='r', label='distance z')
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('z (m)')
plt.legend(loc='best')
plt.grid(True)


plt.subplot(212)
plt.plot(t, v, '-', color='b', label='vitesse')
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('v (m/s)')
```

```
plt.legend(loc='best')
plt.grid()

# tracé (zoom) sur les 20 premières secondes
N = int(20/dt) # nombre d'iteration jusqu'a 20 s

plt.figure()
plt.subplot(211)
plt.plot(t[:N], z[:N], color='r', label='distance z')
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('z (m)')
plt.legend(loc='best')
plt.grid()

plt.subplot(212)
plt.plot(t[:N], v[:N], '-', color='b', label='vitesse')
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('v (m/s)')
plt.legend(loc='best')
plt.grid()

plt.tight_layout()
plt.title('')
plt.show()
```

7 La vitesse limite est de 193 km h^{-1}, soit environ 54 m s^{-1}. 95 % correspond à 50,9 m s^{-1}.

Par lecture graphique, cette vitesse est atteinte après $t(95\%) \approx 10\,\mathrm{s}$. À cet instant, la distance parcourue est d'environ 350 m (lecture graphique).

Remarque : la distance parcourue est très faible $\simeq 5\%$ de la hauteur de chute de chute totale. Luke Aikins passe la plupart de sa chute à la vitesse limite.

8 Par lecture graphique, on trouve un temps de chute totale d'environ 135 s. D'après la vidéo, le temps total de chute est d'environ 130 s.

L'écart entre notre modélisation et la réalité est :

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \frac{|130 - 135|}{130} \\ &\approx 4\%\end{aligned}$$

Ce qui montre un assez bon accord entre la modélisation et la réalité.

L'écart peut provenir du fait que la force de frottement fluide n'est pas exactement proportionnelle au carré de la vitesse, ou que le coefficient λ n'est pas constant durant toute la chute (variation de la position du corps, de la densité de l'air avec l'altitude, etc.).