M3 | Mécanique

Dynamique du point matériel pour un mouvement circulaire

Prérequis

Notions mathématiques : vecteur, projection de vecteur	Lycée et prépa
Notion mathématiques : dérivée d'une fonction	Lycée, prépa et FO7
Notion mathématiques : dérivée d'une fonction composée	Math CPGE et FO7
Cinématique	chapitre M1
Dynamique	Chapitre M2

I Coordonnées polaires

I.A Définition

À connaitre

La base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ est liée à un point de l'espace qui peut être repéré par coordonnées (r, θ).

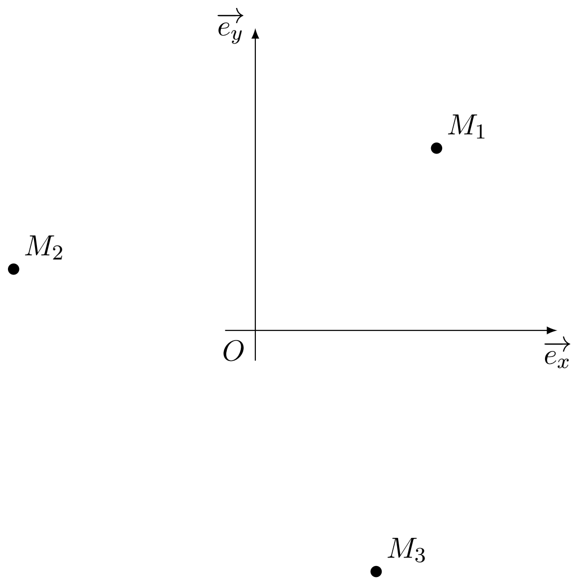
Savoir-faire

Représenter la base polaire associée à un point M de l'espace.

Application 1 : Représenter la base polaire

Énoncé

Pour tous les points M_i, représenter la base polaire.



I.B Position, vitesse et accélération

À connaitre

- Expression de la position, de la vitesse et de l'accélération projetés dans la base polaire ;
- Dérivée des vecteurs de la base : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$.

Savoir-faire

Démontrer les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base polaire à partir de la position.

Application 2 : Vitesse en base polaire

Énoncé

1 Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$

2 En déduire le vecteur vitesse en coordonnées polaires.

Solution

1 En projetant dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{e_r} \underset{\text{cart}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{e_\theta} \underset{\text{cart}}{=} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} \underset{\text{cart}}{=} \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin(\theta) \\ \dot{\theta}\cos(\theta) \end{pmatrix} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} \underset{\text{cart}}{=} \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\cos(\theta) \\ -\dot{\theta}\sin(\theta) \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$$

Nous rappelons la formule de dérivée d'une fonction composée : $[f(g(t))]' = g'(t)f'(g(t))$.

2

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \\
\overrightarrow{v} &= \frac{\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} \\
\overrightarrow{v} &= \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} \\
\overrightarrow{v} &= \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}
\end{aligned}$$

Application 3 : Accélération en base polaire

Énoncé

Démontrer l'expression de l'accélération en coordonnées polaire. Nous rappelons l'expression de la vitesse en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

.

Solution

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\\
\overrightarrow{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right)\\
\overrightarrow{a} &= \ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}\\
\overrightarrow{a} &= \ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}\\
\overrightarrow{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta}\\
\overrightarrow{a} &\underset{\text{pol}}{=} \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

II Déplacement élémentaire

II.A Définition : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$

À connaitre

Représentation sur une trajectoire, $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}$ et lien avec la vitesse.

II.B Expression en coordonnées cartésiennes

À connaitre

Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes.

Savoir-faire

En déduire la vitesse puis l'accélération en cartésien.

II.C Expression en coordonnées polaires

À connaitre

Déplacement élémentaire en coordonnées polaires.

Savoir-faire

En déduire la vitesse puis l'accélération en polaire.

III Coordonnées cylindriques

À connaitre

Base et coordonnées cylindriques. Expression de la position, de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques.

Savoir-faire

Représenter la base cylindrique liée à un point M de l'espace. Démontrer les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques à partir de la position.

IV Mouvement des satellites et des planètes

IV.A Rappels : force d'interaction gravitationnelle et référentiels

À connaitre

Force d'interaction gravitationnelle. Référentiels usuels : laboratoire/terrestre, géocentrique, héliocentrique

IV.B Lois de Kepler

À connaitre

1. loi des trajectoires ;
2. loi des aires ;
3. loi des périodes[1] : $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_{\text{astre}}}$

IV.C Étude de cas

Application 4 : étude d'une orbite circulaire

Énoncé

Soit un satellite en orbite circulaire autour de la Terre de rayon R. Le mouvement est plan, nous nous placerons donc dans la base cartésienne : $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ de centre O correspondant au centre de la Terre.

Nous supposons que le satellite se comporte comme une masse ponctuelle m concentrée en son centre de gravité repérée par le point M.

Nous notons h l'altitude du satellite depuis la surface de la Terre, de telle sorte que $R = R_T + h$.

Données : $R_T = 6400\,\text{km}$ le rayon de la Terre, $M_T = 6{,}00 \times 10^{24}\,\text{kg}$ la masse de la Terre et $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$ la constante de gravitation universelle.

1 Dans quel référentiel est-il astucieux de travailler ?

2 Quel est le système de coordonnées le plus adapté pour étudier les mouvements de rotation ? Représenter le sur un schéma. Rappeler l'expression de la vitesse et de l'accélération dans ce système de coordonnées.

3 Montrer que, pour une trajectoire circulaire, le mouvement est uniforme en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

4 En déduire la période de révolution du satellite T et la 3e loi de Kepler.

Solution

1 Nous utilisons le référentiel géocentrique lié au centre de la Terre et pointant vers trois étoiles lointaines.

2 Nous utilisons le système de coordonnées polaire car le mouvement est circulaire et plan.

1. expression non exigible, il faut retenir que le rapport de la période qu carré sur le demi-grand axe est une constante.

(3) Faire schéma.
Syst : satellite M de masse m
Référentiel et repère déjà définis.
Bilan des actions mécaniques : force de gravitation : $F_{T\to M} = -G\frac{M_T m}{R^2}\overrightarrow{e_r}$
Nous appliquons le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = -G\frac{M_T m}{R^2}\overrightarrow{e_r}$$
$$\text{or} \quad \overrightarrow{a} \underset{r=R=Cste}{=} -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$
$$\text{d'où} \quad {}_{\text{pol}}\begin{pmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \end{pmatrix} = {}_{\text{pol}}\begin{pmatrix} -G\frac{M_T}{R^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La projection sur $\overrightarrow{e_\theta}$ nous donne que $\dot{\theta} = C^{ste}$. Donc la vitesse $\overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ est de norme constante, le mouvement est donc uniforme.
⚠ Ne pas confondre uniforme et vecteur vitesse constante. Ici le vecteur vitesse n'est pas constant puisque sa direction varie au cours du temps. En revanche sa norme est constante.
(4) La projection sur $\overrightarrow{e_r}$ nous donne :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{GM_T}{R^3}$$

Or la vitesse est la distance parcourue pour faire un tour divisée par la période :

$$v = R\dot{\theta} = \frac{2\pi R}{T}$$

En injectant dans la relation précédente :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM_T}{R^3}$$

D'où

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \text{3}^{\text{ème}} \text{ loi de } \textit{Kepler}$$

et

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$$

Application 5 : calcul d'orbite

Énoncé
Soit un satellite en orbite circulaire autour de la Terre de rayon R. Le mouvement est plan, nous nous placerons donc dans la base cartésienne : $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ de centre O correspondant au centre de la Terre.
Nous supposons que le satellite se comporte comme une masse ponctuelle m concentrée en son centre de gravité repérée par le point M.
Nous notons h l'altitude du satellite depuis la surface de la Terre, de telle sorte que $R = R_T + h$.
Données : $R_T = 6400\,\text{km}$ le rayon de la Terre, $M_T = 6{,}00 \times 10^{24}\,\text{kg}$ la masse de la Terre et $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$ la constante de gravitation universelle.
Nous rappelons l'expression de la 3e loi de Kepler : $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\text{a}}$

(1) Rappeler la définition de chaque terme dans la 3e loi de Kepler.
Nous supposons, pour la question suivante, que le satellite en orbite basse, de telle sorte que $h \ll R_T \Leftrightarrow R \simeq R_T$.
(2) Calculer la période de révolution T.
Nous supposons maintenant que le satellite est géostationnaire.
(3) Définir le mot géostationnaire.
(4) Déterminer R et h pour un satellite géostationnaire.

Solution
(1)

- T : période de révolution d'un système autour de son centre attracteur ;
- R : habituellement noté a : demi-grand axe de l'ellipse de révolution. R : rayon de l'orbite dans le cas circulaire ;
- G : constante universelle de gravitation ;
- M_a : masse de l'astre attracteur.

(2) D'après la loi de *Kepler* : $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$ A.N. $T = 5085\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{h}24$
(3) Le satellite est dit géostationnaire s'il observe toujours la même zone de la Terre. Il a donc la même période de révolution.
(4)

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

A.N

$$R = 42\,300\,\mathrm{km}$$

et

$$h = 35\,900\,\mathrm{km}$$

Comprendre le chapitre en s'interrogeant

1. Dans quel cas est-il intéressant de définir un système de coordonnées polaires ? ☐
2. Comment définir la base (locale) polaire ? ☐
3. Quel est le vecteur position d'un point M en projection sur la base (locale) polaire ? ☐
4. Quels sont les domaines de variation des coordonnées polaires (r, θ). ☐
5. Quelle est la dérivée du vecteur $\overrightarrow{e_r}$ par rapport au temps ? Du vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$? ☐
6. Comment se projette la vitesse dans la base polaire ? ☐
7. Comment se projette l'accélération dans la base polaire ? ☐
8. Dans quel cas est-il intéressant de définir un système de coordonnées cylindriques ? ☐
9. Quelle est la définition d'un mouvement uniforme ? ☐
10. Quels sont les caractéristiques d'un mouvement rectiligne ? Circulaire ? ☐
11. Quelles sont les caractéristiques du mouvement circulaire uniforme ? ☐