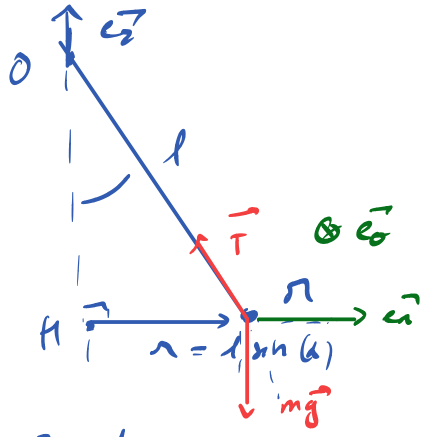
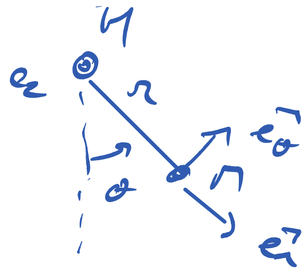
Equilibre en rotat°

1. vue de face — vue de dessus





Syst : M, de masse m

réf : terrestre galiléen

BAME : • $m\vec{g}$, $\vec{M}_O(m\vec{g}) \underbrace{=}_{\text{bras de levier}} r\,mg\,\vec{e_\theta} = mlg\sin(\alpha)\,\vec{e_\theta}$

• $\vec{T}$: tension du fil. $\vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{0}$ car O sur la droite d'applicat° de $\vec{T}$.

TMC : $\dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = mgl\sin(\alpha)\,\vec{e_\theta}$

déterminons $\vec{L_O}$.

$\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)$, or M est en rotation sur un cercle de centre H à la vitesse angulaire ω : $\vec{v}(M) = r\omega\,\vec{e_\theta} = l\sin(\alpha)\,\omega\,\vec{e_\theta}$

$$\vec{L_O} = m(\vec{OH} + \vec{HM}) \wedge r\omega\,\vec{e_\theta}$$

$$\vec{L_O} = m\omega \begin{vmatrix} l\sin(\alpha) \\ 0 \\ -l\cos(\alpha) \end{vmatrix}_{(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ l\sin(\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L_O} = ml^2\omega \begin{vmatrix} \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ 0 \\ \sin^2(\alpha) \end{vmatrix}_{(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})}$$

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = ml^2\omega^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\,\vec{e_\theta}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = \omega\,\vec{e_\theta} \\ \dfrac{d\vec{e_z}}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

TMC / $\vec{e_\theta}$

$$\cancel{m}\,l^{\cancel{2}}\omega^2\cos(\alpha)\cancel{\sin(\alpha)} = \cancel{m}g\cancel{l}\cancel{\sin(\alpha)}$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{g}{\omega^2 l}}$$

α existe ssi $0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ $(\alpha > 0)$

d'où $0 \leq \dfrac{g}{\omega^2 l} < 1$

$$\boxed{0 \leq \sqrt{\frac{g}{l}} < \omega}$$

on pose $\omega_0 = \sqrt{g/l}$,

Il existe un angle d'équilibre ssi $\boxed{\omega \geq \omega_0}$

et $\boxed{\alpha = \arccos\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}$