

- Exercice 6 -

1. Toutes les contraintes (poids) et les conditions initiales sont contenues dans le plan $(0, x, y)$ donc le système est contraint à rester dans ce plan.

2. système: Π de masse m
ref: terrestre, support galiléen

BATTE: poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \vec{e}_y$

nous négligeons les frottements de l'air.

cond cart

PPD: $m\vec{a} = -mg \vec{e}_y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

3. Par intégration

$$\begin{cases} \ddot{x} = c_1 \\ \ddot{y} = -g t + c_2 \end{cases} \quad \text{avec } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{à } t=0 \quad \vec{v}_0 = \begin{vmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \end{vmatrix}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} c_1 = v_0 \cos(\alpha) \\ c_2 = v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y = \begin{vmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ -g t + v_0 \sin(\alpha) \end{vmatrix}$$

4. Par intégration

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha) t + c_3 \\ y = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha) t + c_4 \end{cases} \quad \text{avec } (c_3, c_4) \in \mathbb{R}^2$$

on à $t=0$ $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases}$

au final $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y = \begin{vmatrix} v_0 \cos(\alpha) t \\ -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha) t \end{vmatrix}$

5 $t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$

d'où $y = -g \frac{x^2}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} + \frac{v_0 \sin(\alpha) x}{v_0 \cos(\alpha)}$

$y(x) = \frac{-g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x$

6 on cherche le point où la dérivée s'annule
 $\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_f + \tan(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow x_f = \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha) \tan(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g}$

position de la flèche.

7 $\frac{dx_f}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$
 $= \frac{v_0^2}{g} (\cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha)))$

$$= \frac{v_0^2}{g} \left(2 \cos^2(\alpha) - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \alpha = \pm \pi/4$ seule la valeur $+\pi/4$ a un sens physique

8 on cherche le point tel que

$$y(x_p) = 0$$

$$\tan(\alpha) \cancel{x_p} = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_p^2$$

$$x_p = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos^2(\alpha) \tan(\alpha) = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos(\alpha) \sin(\alpha) = 2 x_f -$$

9 Comme pour la pliche, la portée maximale est atteinte pour $\alpha = \pi/4$

$$x_p(\alpha = \pi/4) = \cancel{2} \frac{v_0^2}{g} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{2}$$

$$\left(\text{et } x_f(\alpha = \pi/4) = \frac{v_0^2}{g} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) -$$