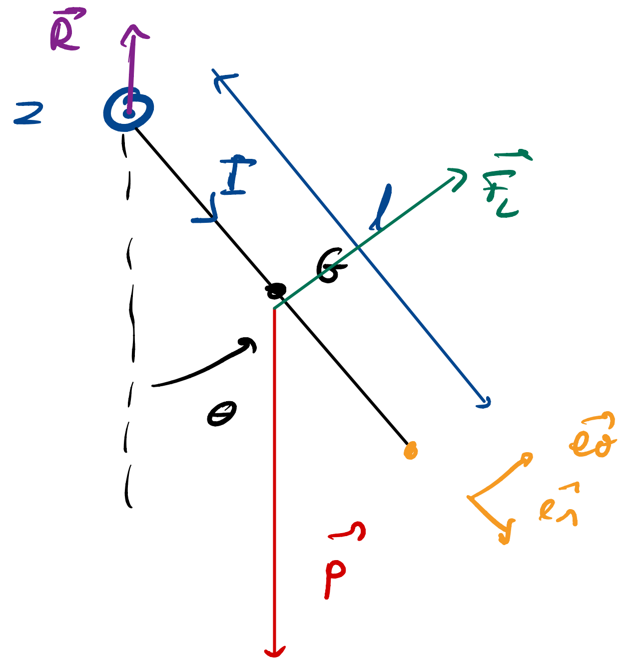
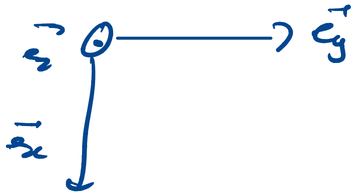
Exercice 6





1) syst : tige de moment d'inertie J selon Oz.

BAME : • poids : $\vec{P} = mg\,\vec{e_x}$

• Réaction de la pivot $\vec{R}$

• force de Laplace $\vec{F_L} = i\,l\,\vec{e_r} \wedge (-B\,\vec{e_z})$

$= -i\,l\,B\;\vec{e_r} \wedge \vec{e_z}$

$$\boxed{\vec{F_L} = +i\,l\,B\;\vec{e_\theta}}$$

2) $\Gamma_{Oz}(\vec{F_L}) = (\vec{OG} \wedge \vec{F_L}).\vec{e_z}$

la force de Laplace s'applique au milieu de la tige.

$\Gamma_{Oz}(\vec{F_L}) = \left(\frac{l}{2}\,\vec{e_r} \wedge i\,l\,B\,\vec{e_\theta}\right).\vec{e_z} = \frac{i\,l^2 B}{2}\;\vec{e_z}.\vec{e_z}$

d'où $\boxed{\Gamma_{Oz}(\vec{F_L}) = \frac{I l^2 B}{2}}$

$\boxed{3}$ cf Q 1.

<u>Calcul des moments</u>

- $\Gamma_{Oz}(\vec{R}) = 0$ car $\vec{R}$ s'applique sur l'axe (Oz).
- $\boxed{\Gamma_{Oz}(\vec{P}) = - \frac{l}{2} mg \sin(\theta)}$

$\boxed{4}$ réf : laboratoire, supposé galiléen.

<u>TMC</u> : $\frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) = \frac{I l^2 B}{2} - \frac{l}{2} mg \sin\theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{l m g}{2J} \sin(\theta) = \frac{I l^2 B}{2J}} \qquad (*)$$

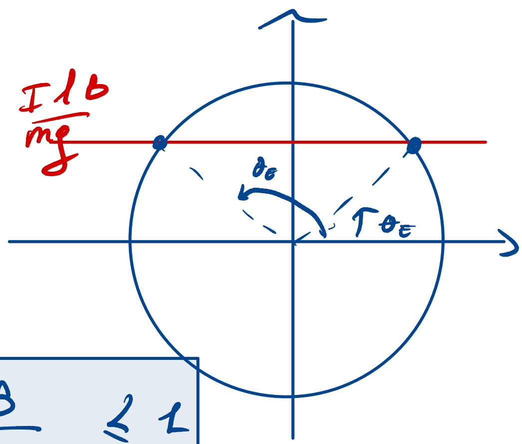
à l'équilibre, les moments se compensent

$$\frac{I l^{\cancel{2}} B}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{l}}{\cancel{2}} mg \sin(\theta_E)$$

d'où $\boxed{\sin(\theta_E) = \frac{I l B}{m g}}$

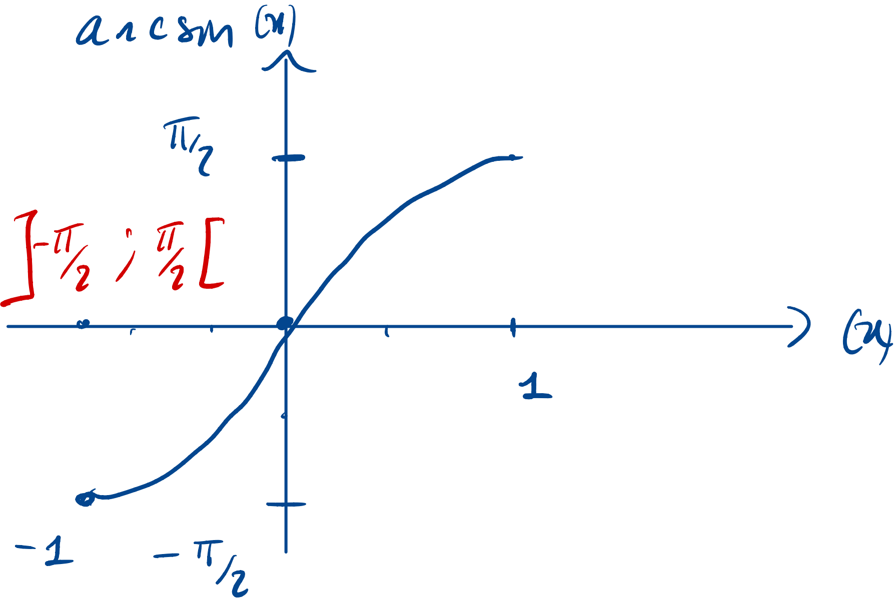
$$\theta_E = \arcsin\left(\frac{I l B}{m g}\right)$$

ou $\theta_E = \pi - \arcsin(I l B / mg)$



Une solution existe ssi $\boxed{\frac{I l B}{mg} < 1}$

D arcsin est défini de $]-1;1[\rightarrow]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$



$\boxed{5}$ On reprend l'équation (*) dans l'approx des petits angles

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = kI \\ \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{l m g}{2J}} \\ \text{et} \quad k = \dfrac{l^2 B}{2J} \end{array}}$$

$\boxed{6}$ Je reconnais une équation différentielle d'ordre 2 sans terme d'amortissement, la sol$^{t°}$ est

$$\theta(t) = \underbrace{A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}_{\text{solut° homogène}} + \underbrace{\frac{k}{\omega_0^2} I}_{\text{solut° particulière}}$$

C.I $\begin{cases} \theta(t=0) = \theta_0 \iff A + \dfrac{kI}{\omega_0^2} = \theta_0 \iff A = \theta_0 - \dfrac{kI}{\omega_0^2} \\ \dot{\theta}(t=0) = 0 \quad (\text{vitesse nulle } /\ \dot{\theta}(t=0) = 0) \end{cases}$

$$\dot{\theta}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \xrightarrow{C.I} B = 0$$

d'où $\boxed{\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{kI}{\omega_0^2}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{kI}{\omega_0^2}}$