ELM2 | Électromagnétisme

Induction

Prérequis

- Champ magnétique $\vec{B}$ — ELM1
- Force de Laplace, et couple des forces de Laplace — ELM1
- Mise en équation d'un circuit électrique — E1 à E3
- Rail de Laplace sans phénomène d'induction — ELM1
- Surfaces élémentaires : cartésien et polaire. Surfaces usuelles : carré, rectangle, disque, sphère, . . . — math

I Phénomène d'induction

I.A Mise en évidence

Expérience : aimant et spire

Matériel : bobine plate de N spires, aimant droit.
Expérience à réaliser :

- approcher l'aimant de la bobine ;
- éloigner l'aimant de la bobine ;
- retourner l'aimant et recommencer ;
- approcher la bobine de l'aimant, puis l'éloigner ;
- retourner la bobine et recommencer.

Vidéo de l'expérience

I.B Loi (de modération) de Lenz

À connaitre

Le courant électrique qui apparait tend à produire un champ magnétique qui s'oppose au champ magnétique qui lui a donné naissance.

Savoir-faire

Orienter le courant dans un circuit siège d'induction.

Remarque : les lois de modération sont nombreuses en physique, la nature cherchant à minimiser son énergie (principe de moindre action).

I.C Notion de flux

I.C.1 Flux d'un vecteur

À connaitre

Flux d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ au travers d'une surface orientée :

$$\Phi = \iint_{\Sigma_{\circlearrowleft}} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

$\overrightarrow{A}$ est alors nommé (vecteur) densité de flux ou (vecteur) densité de courant.

Remarque : on peut voir un flux comme un "débit" pour faire une analogie avec la mécanique des fluides. Vous retrouverez l'an prochain de nombreux flux.

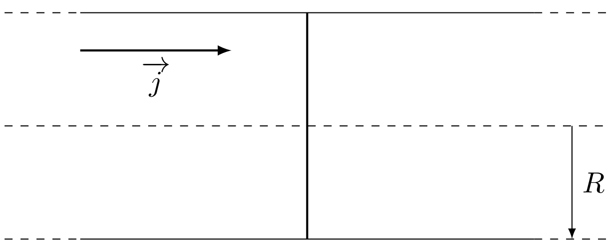
Savoir-faire

Déterminer le flux d'un vecteur au travers d'une surface.

Application 1 : Courant électrique

Énoncé

Nous donnons $\overrightarrow{j} = \rho_e \overrightarrow{v}$ la densité de courant électrique, supposé uniforme (dans l'ARQS), avec ρ_e la densité de charge électrique (nombre de charge électrique par unité de volume) et $\overrightarrow{v}$ la vitesse des charges électriques.



Vue en coupe d'un fil, parcouru par des électrons de densité de courant $\overrightarrow{j}$.

(1) Le flux de la densité de courant $\overrightarrow{j}$ au travers d'une section droite du fil.
(2) Montrer, en utilisant l'homogènétié, que le flux de la densité de courant, correspond à l'intensité du courant électrique.

Solution

(1) On oriente le contour pour que la surface soit orienté dans la même direction que $\overrightarrow{j}$.

$$\Phi = \iint \overrightarrow{j} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

$$\Phi = \rho_e v \pi R^2 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{j} = \overrightarrow{Cte}$$

(2)

$$[\Phi] = \mathrm{C\,m^{-3}m\,s^{-1}m^2}$$
$$[\Phi] = \mathrm{C\,s^{-1}}$$
$$[\Phi] = \mathrm{A} \quad \text{car} \quad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Donc le flux de la densité de courant électrique correspond à l'intensité du courant électrique (débit de charge électrique comme vue en électronique).

I.C.2 Flux magnétique

À connaitre

Le flux magnétique noté Φ est donné par :

$$\Phi_B = \iint_{\Sigma_\circlearrowleft} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{\Sigma_\circlearrowleft} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}S\overrightarrow{n}$$

où $\mathrm{d}S$ est un élément de surface, $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à l'élément de surface **orienté**,
Unité : $[\Phi_B] = \mathrm{T\,m^2} = \mathrm{V\,s} = \mathrm{Wb} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,A^{-1}}$
Important :

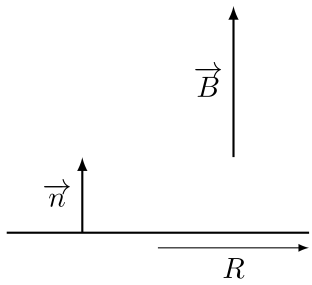
- ☐ le signe du flux dépend de l'orientation choisie, mais pas sa valeur absolue ;
- ☐ le flux est un scalaire ;
- ☐ le flux ne dépend pas de la surface, mais uniquement du contour. On prendra donc la surface la plus simple.

Dans le cas d'un champ magnétique uniforme, $\Phi_B = \overrightarrow{B}\,\overrightarrow{S}$.

Application 2 : Flux magnétique

Énoncé
Soit une spire circulaire de rayon R traversée par un courant i constant de normale $\overrightarrow{n}$. La spire est plongée dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{n}$ avec $B_0 > 0$.
(1) Faire un (des) schéma(s).
(2) Déterminer le flux du champ magnétique Φ_B.
(3) Que devient le flux si nous changeons le sens de champ magnétique $\overrightarrow{B} = -B_0\overrightarrow{n}$ avec $B_0 > 0$.
Dans la suite, nous supposons qu'il s'agit d'une bobine plate (les spires sont superposées) de N spires, et le champ est à nouveau $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{n}$ avec $B_0 > 0$.
(4) Déterminer le nouveau flux au travers de la bobine plate.
(5) Justifier qu'on utilise des bobines plates plutôt qu'une spire simple pour mesurer un champ magnétique.

Solution
(1)



Vue de côté de la spire.

(2) Le contour dans le même sens que $\overrightarrow{n}$.

$$\Phi_B = B_0 \pi R^2$$

(3) Le plus devient négatif :

$$\Phi_B = -B_0 \pi R^2$$

(4)

$$\Phi_{\text{bobine}} = N\Phi_B = NB_0\pi R^2$$

.

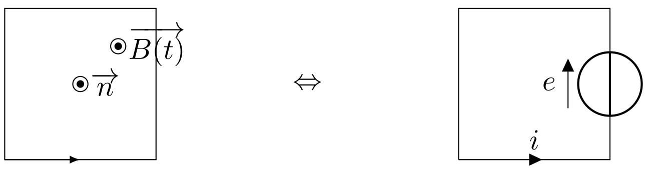
(5) Le flux est proportionnel au nombre de spires, plus le flux est grand plus la mesure est précise.

I.D Loi de Lenz-Faraday

À connaitre

L'apparition d'un courant électrique dans un conducteur fermé, peut se modéliser par la présence d'un générateur de tension idéale de force électromotrice :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t}$$



- ☐ le générateur de tension idéal de tension est orienté dans le même sens que le contour sur lequel s'appuie la surface de calcul du flux magnétique ;
- ☐ l'intensité du courant aussi ;
- ☐ le signe $-$ dans l'expression provient de la loi de modération de *Lenz* ;
- ☐ $[e] = \mathrm{V}$, ce qui permet de déduire que $[\Phi_B] = \mathrm{V\,s}$.
- ☐ nous localisons le générateur de tension en un endroit précis du circuit, mais il est "en réalité" réparti sur l'intégralité du contour fermé, à l'image de la résistance d'un fil.

II Champ variable et circuit fixe

Remarque : c'est l'induction dite de *Neumann*.

II.A Auto-induction : inductance propre

À connaitre

Soit un circuit fermé traversé par un courant variable i.
On peut montrer que le flux propre au travers du circuit est proportionnelle au courant :

$$\Phi_b = Li$$

où L est l'inductance propre (ou auto-inductance) exprimé en H.
L en dépend que la géométrie du circuit (nombre de spire, dimension...)

Savoir-faire

- ☐ calculer pour des géométries "simples" (avec un degré de symétrie important) le coefficient d'auto-inductance, le champ magnétique étant fourni ;
- ☐ utiliser le coefficient d'inductance propre pour la résolution d'un circuit électrique ;

Remarque, en convention récepteur, $u = -e = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, nous retrouvons la loi de comportement d'une bobine.

Application 3 : Coefficient d'autoinduction

Énoncé
Soit une bobine de rayon R et de longueur ℓ. Elle se compose de N spires.
1 Dans quelle mesure peut-on supposer la bobine infinie ?
Nous donnons le champ magnétique produit dans la bobine par la bobine $\overrightarrow{B} = \mu_0 n i \overrightarrow{u}$ avec n la densité de spire (nombre de spires par unité de longueur $n = \dfrac{N}{\ell}$) et i le courant qui traverse la bobine, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire. Le champ magnétique extérieur est nul.
2 Faire un schéma : préciser la direction du champ magnétique.
3 Déterminer l'expression du coefficient d'auto-inductance L en fonction de n, ℓ, μ_0 et de R.

Solution
1 $\ell \gg R$
2 Schéma d'une bobine.
3

$$\phi_{p,1\text{ spire}} = \mu_0 n i S \quad \text{car } \overrightarrow{B} \text{ uniforme}$$
$$\phi_{p,\text{tot}} = N\phi_{p,1\text{ spire}} = N\mu_0 n i S$$
$$\phi_{p,\text{tot}} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i S = Li$$
$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell}\pi R^2$$

II.B Inductance mutuelle

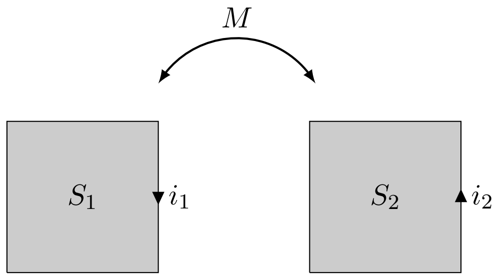
À connaitre

Deux circuits couplés de courant i_1 et i_2.
Nous pouvons montrer que :

$$\Phi_{B,2\to1} = Mi_2$$

$$\Phi_{B,1\to2} = Mi_1$$

où M est le coefficient d'inductance mutuelle exprimé en H.



- ☐ ⚠ les flux ne sont ni égaux ni opposé $\Phi_{B,2\to1} \neq \Phi_{B,1\to2}$ (sauf si $i_1 = i_2$) ;
- ☐ le coefficient d'inductance mutuelle est le même, pas besoin de le calculer dans les deux sens ;
- ☐ M ne dépend pas de la géométrie des circuits 1 et 2 ainsi que de leurs positions relatives ;
- ☐ $M \leq \sqrt{L_1L_2}$, où l'égalité correspond au meilleur couplage possible entre les circuits ;

Savoir-faire

- ☐ déterminer un coefficient d'inductance mutuelle, le champ magnétique étant fourni ;
- ☐ utiliser dans la résolution d'un circuit électrique le coefficient d'inductance mutuelle ;

Application 4 : Bobines imbriquées

Énoncé

Nous considérons un solénoïde 1 de rayon R_1, de longueur ℓ_1 et de nombre de spires N_1 parcouru par un courant i_1.
Au centre de ce solénoïde, nous plaçons un second solénoïde 2 de rayon $R_2 < R_1$, de longueur $\ell_2 < \ell_1$ et de nombre de spires N_2 parcouru par un courant i_2.
(1) Faire un schéma.
(2) Rappeler ce qu'est un solénoïde.
Nous donnons pour un solénoïde, le champ magnétique extérieur est nul et le champ magnétique intérieur est :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{u}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.
(3) Déterminer le flux 1 sur 2. En déduire le coefficient d'inductance mutuelle $M_{1\to2}$.
(4) Faire de même pour 2 sur 1. Conclure sur le coefficient d'inductance mutuelle du couplage.

Solution

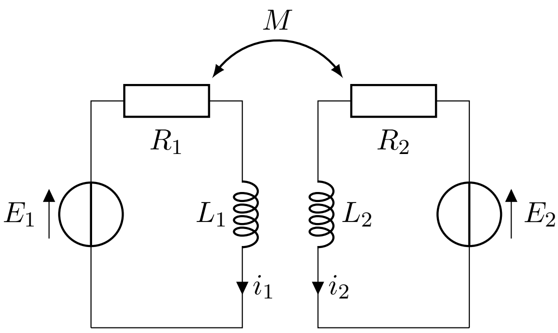
(1)

(2) Bobine "infinie" : c'est-à-dire que la longueur ℓ est très grande devant le rayon R.
(3) Attention la réponse aux deux questions suivantes dépend du schéma ! Il faut bien regarder à travers quelle section passe le flux. On doit trouver le même résultat pour les deux questions : $M = \mu_0 \dfrac{N_1 N_2}{\ell} \pi R^2$ où ℓ est la longueur du plus long solénoïde, et R le rayon du plus petit solénoïde, soit ici :

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} \pi R_1^2$$

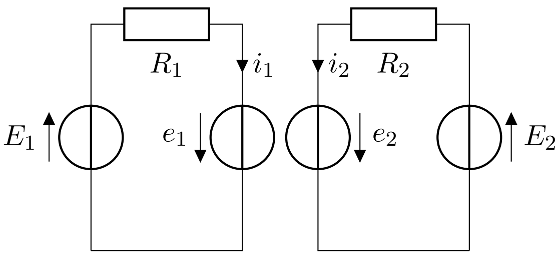
Application 5 : Circuits couplées

Énoncé



(1) En introduisant les forces électromotrices induites e_1 et e_2, donner la représentation électrique équivalente du circuit couplé. Exprimer e_1 et e_2 en fonction de L_1, L_2, M, i_1 et i_2.
(2) En déduire, le système d'équations couplées sur i_1 et i_2. Savez-vous le résoudre ?
(3) Faire un bilan de puissance sur le circuit.

Solution
(1) On respecte les conventions d'induction :



$$e_1 = -L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$e_2 = -L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

(2) Loi des mailles et de comportement sur chaque circuit :

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{L_1} i_1 = \frac{E_1}{L_1} - \frac{M}{L_1} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Loi des mailles sur le circuit de droite :

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{R_2}{L_2} i_2 = \frac{E_2}{L_2} - \frac{M}{L_2} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

On ne sait pas résoudre, car i_1 et i_2 apparaissent dans deux équations différentielles : elles sont couplées.
(3) Rappel méthode : loi des mailles $\times$ l'intensité dans la maille.
Pour le circuit de gauche :

$$E_1 i_1 + e_1 i_1 = R_1 i_1^2$$
$$P_{g,1} = P_{j,1} + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} i_1 + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} i_1$$
$$P_{g,1} = P_{j,1} + \frac{\mathrm{d}1/2 L_1 i_1^2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} i_1$$
$$P_{g,1} = P_{j,1} + \frac{\mathrm{d}1/2 L_1 i_1^2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} i_1$$
$$P_{g,1} = P_{j,1} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{L_1}}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} i_1$$

Idem pour le circuit de droite :

$$P_{g,2} = P_{j,2} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{L_2}}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} i_2$$

On somme les deux :

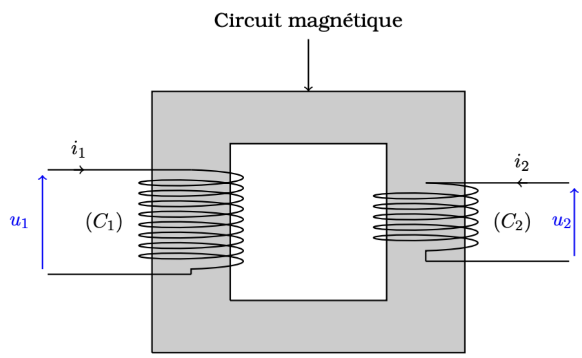
$$P_{g,1} + P_{g,2} = P_{j,1} + P_{j,2} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{L_1}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{L_2}}{\mathrm{d}t} + M \left(\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} i_1 + \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} i_2 \right)$$
$$P_{g,tot} = P_{j,tot} + P_{L_1} + P_{L_2} + \frac{\mathrm{d}M i_1 i_2}{\mathrm{d}t}$$

Le terme $\mathcal{E}_M = M i_1 i_2$ est l'énergie emmagasinée dans le couplage magnétique des deux circuits.

II.C Application au transformateur

Application 6 : Transformateur

Énoncé
Un transformateur parfait est constitué de deux circuits : le primaire ($\mathcal{C}_1$) ayant N_1 spires et d'inductance propre L_1 ; et le secondaire ($\mathcal{C}_2$) ayant N_2 spires et d'inductance propre L_2. Le circuit magnétique sert à réaliser un couplage fort : $M^2 = L_1 L_2$ entre les deux circuits.



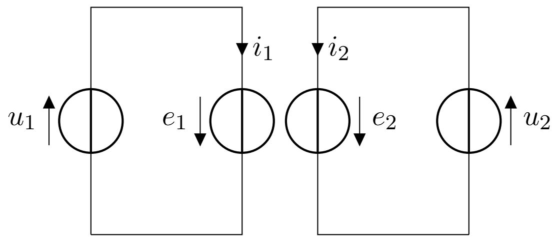
On note M le coefficient de mutuelle inductance entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et on néglige la résistance des deux enroulements.

On peut montrer que :

$$L_1 = \alpha\mu_0 N_1^2$$
$$L_2 = \alpha\mu_0 N_2^2$$
$$M = \alpha\mu_0 N_1 N_2$$

où μ_0 est la perméabilité du vide et α une constante géométrique.
u_1 est la tension d'entrée du transformateur quand u_2 est la tension de sortie.
(1) Représenter le schéma électrique équivalent du transformateur. Introduire les forces électromotrices induites e_1 et e_2 en précisant leurs expressions.
(2) Exprimer u_1 en fonction L_1, M, i_2 puis u_2 en fonction L_2, i_1 et i_2.
(3) En déduire le rapport u_2/u_1 en fonction de M et L_1. Puis en fonction de N_1 et N_2.
(4) Quel est l'intérêt d'utiliser le transformateur dans les cas suivants : $N_1 > N_2$, $N_1 < N_2$ et $N_1 = N_2$?

Solution
(1) En respectant les conventions d'induction :



avec $e_1 = -L_1\dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt}$ et $e_2 = -L_2\dfrac{di_2}{dt} - M\dfrac{di_1}{dt}$
(2) $u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$ et $u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$
(3) On injecte la première équation dans la seconde, et $M^2 = L_1L_2$ donne :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

(4)

- si $N_2 > N_1$ alors $u_2 > u_1$: le circuit est un élévateur de tension (ligne haute tension, peu de pertes par effet joule) ;
- si $N_2 < N_1$ alors $u_2 < u_1$: le circuit est un abaisseur de tension (transformateurs domestiques pour alimenter nos appareils électriques en 12 V) ;
- si $N_2 = N_1$ alors $u_2 = u_1$: transformateur d'isolement. Permet d'isoler électriquement deux circuits, mais de transmettre tout de même la puissance.

III Champ constant et circuit mobile

Remarque : c'est l'induction dite de *Lorentz*.

Savoir-faire

Méthode de résolution :

- équation mécanique : à partir d'un bilan mécanique sur la partie mobile du circuit ;
- équation électrique : à partir d'une loi des mailles ;

III.A Retour sur le rail de Laplace

III.A.1 Cas du moteur

À connaitre

La conversion de puissance des forces de *Laplace* au générateur induit e_{ind} se fait sans perte :

$$P_L + P_{\text{ind}} = 0$$

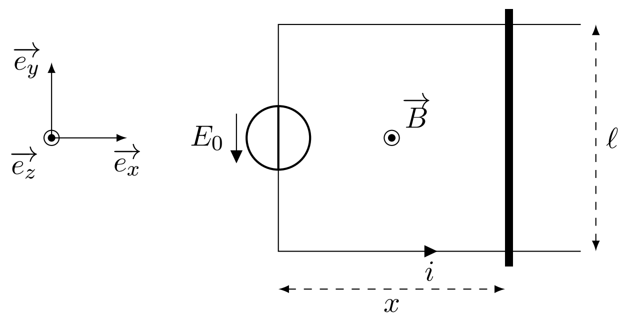
Les pertes proviennent des frottements mécaniques et de la dissipation par effet joule.

Savoir-faire

- Établir l'équation mécanique et mécanique du rail de Laplace ;
- Résoudre l'équation du mouvement dans le cas moteur (générateur de tension) ;

Application 7 : Rail de Laplace : moteur

Énoncé



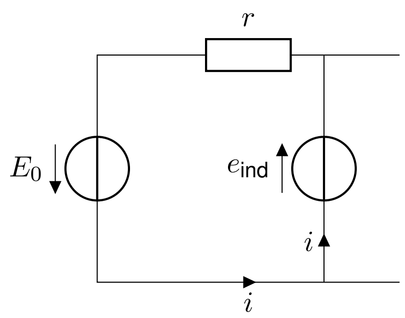
Considérons un système de rails de Laplace séparés d'une distance ℓ et soumis à un champ magnétique extérieur uniforme $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$.
Le champ de gravitation est orthogonal, rentrant dans la feuille. Nous négligeons les frottements de Coulomb.
L'ensemble possède une résistance électrique r. Ce système est utilisé en fonctionnement moteur : un générateur impose une tension E_0, ce qui met en mouvement la tige initialement immobile.
Il réalise donc une conversion d'énergie électrique en énergie mécanique.
On note $v = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e_x}$ la vitesse de la tige selon $\overrightarrow{e_x}$
1 Établir l'équation mécanique de la tige de masse m.
2 Établir l'équation électrique du circuit.
3 En déduire une équation différentielle sur la vitesse v de la tige. La résoudre.
4 En déduire $i(t)$. Commenter la valeur finale de l'intensité.
5 Déterminer la puissance des forces de Laplace P_L et la puissance induite par le générateur induit P_{ind}. Conclure.

Solution

1 Force de Laplace sur la tige : $\overrightarrow{F_L} = i\ell B\overrightarrow{e_x}$
PFD en référentiel galiléen sur la tige :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = i\ell B$$

(2) Circuit équivalant avec l'induit :



Avec $e_{\text{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$

$$\Phi_B = BS$$
$$\Phi_B = Bx\ell$$
$$e_{\text{ind}} = -B\ell\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$e_{\text{ind}} = -B\ell v$$

Avec une loi des mailles, nous obtenons alors :

$$E_0 = ri + B\ell v$$

(3) Les deux équations sont couplées, v et i dépendent du temps.

$$i = \frac{E_0 - B\ell v}{r}$$
$$\text{d'où} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \ell B\frac{E_0 - B\ell v}{r}$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{(B\ell)^2}{mr}v = \frac{E_0 B\ell}{mr}$$

Posons $\tau = \dfrac{mr}{(B\ell)^2}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = \frac{E_0}{B\ell\tau}$$

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1, dont la solution est :

$$v(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E_0}{B\ell}$$
$$v(0) = 0 \Leftarrow \lambda = -\frac{E_0}{B\ell}$$
$$v(t) = \frac{E_0}{B\ell}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

Nous pouvons introduire la vitesse limite $v_\ell = \dfrac{E_0}{B\ell}$, la vitesse atteinte par la tige en régime permanent.

(4) Deux façons de procéder :

- ⇝ soit nous déterminons l'équation différentielle sur i en faisant le contraire de la question précédente ;
- ⇝ soit nous injectons la solution de la vitesse dans i ;

$$i(t) = \frac{E_0 - B\ell v(t)}{r}$$
$$i(t) = \frac{E_0}{r} - \frac{B\ell}{r}\frac{E_0}{B\ell}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$
$$i(t) = \frac{E_0}{r}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

L'intensité initiale vaut $i(0) = E_0/r$ sans la présence du générateur induit, car le circuit est immobile $e_ind(0) = 0$. En régime permanent, l'intensité du courant induite tend à s'opposer au courant du générateur pour annuler le courant total, mais attention chaque générateur délivre une intensité E_0/r de signe opposé.

5

$$P_L = F_L v$$
$$P_L = i(t)\ell B v(t)$$
$$sP_{\text{ind}} = e_{\text{ind}}(t)i(t)$$
$$P_{\text{ind}} = -B\ell v(t)i(t)$$

On conclue que $P_L + P_{\text{ind}} = 0$, la puissance est intégralement transmise par induction.

III.A.2 Cas du générateur (génératrice)

Savoir-faire

- Établir l'équation mécanique et mécanique du rail de Laplace ;
- Résoudre l'équation du mouvement dans le cas moteur (générateur de tension) ;

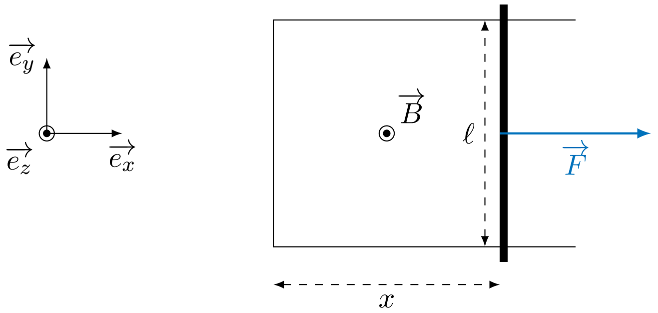
Application 8 : Rail de Laplace : génératrice

Énoncé

Nous reprenons l'exercice précédent. Nous retirons le générateur de tension, et à la place, un opérateur tire sur la tige avec une force constante $\vec{F} = F_0\vec{e_x}$.

La résistance totale du circuit vaut r, nous négligeons les frottements de Coulomb, et le poids et la réaction de la tige sur les rails se compensent.

Nous notons v la vitesse de la tige dans la direction $\vec{e_x}$: $v = \vec{v} \cdot \vec{e_x}$.



1 Déterminer l'équation mécanique du mouvement de la tige. ⚠ Nous ne négligeons pas les effets inductifs !

2 Déterminer l'équation électrique du circuit.

3 En déduire l'équation différentielle sur la vitesse v. Déterminer alors $v(t)$.

4 En déduire $i(t)$. Commenter les valeurs prises par l'intensité.

5 Faire un bilan de puissance, commenter.

Solution

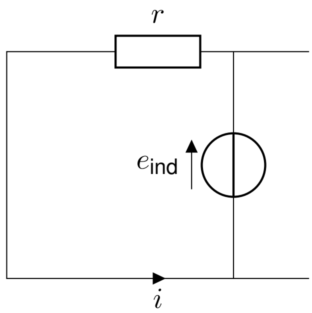
1 Forces :

- $\overrightarrow{F} = F_0\overrightarrow{e_x}$,
- force de Laplace : $\overrightarrow{F_L} = iB\ell$ en orientant le circuit dans le trigonométrique.

PFD en projection sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_0 + i(t)B\ell$$

2 Toujours en orientant le circuit dans le sens trigonométrique, le circuit équivalent est :



avec

$$e_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$
$$\Phi_B = Bx\ell$$
$$e_{\text{ind}} = -B\ell v(t)$$

La loi des mailles donne alors :

$$ri(t) + B\ell v = 0$$

3 On injecte $i(t)$ dans l'équation mécanique :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_0 - \frac{(B\ell)^2}{r}v$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = \frac{F_0}{m}$$
$$\text{avec} \quad \tau = \frac{mr}{(B\ell)^2}$$

Je reconnais une équation différentielle d'ordre 1, dont la solution est :

$$v(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{\tau}{m}F_0$$
$$v(t=0) = 0 \quad \Leftarrow \lambda = -\frac{\tau}{m}F_0$$
$$v(t) = \frac{\tau}{m}F_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

On peut introduire $v_\ell = \dfrac{\tau}{m}F_0$ la vitesse limite de la tige.

4

$$i(t) = -B\ell v(t)$$
$$i(t) = -B\ell\frac{\tau}{m}F_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$
$$i(t) = \frac{r}{B\ell}F_0\left(e^{-t/\tau}-1\right)$$

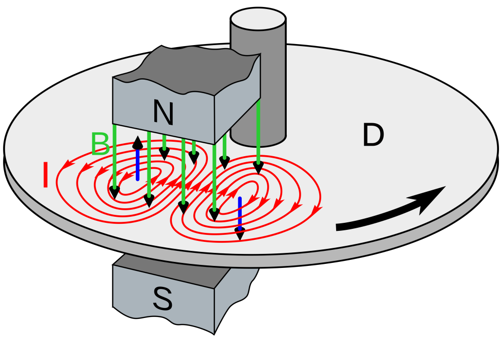
$i(t=0)=0$, il n'y a pas encore de courant induit, car il n'y a pas de flux induit. Dès que la tige se met à bouger $i(t>0)<0$, le courant est négatif, tend à générer un champ magnétique qui s'oppose à $\overrightarrow{B}$.
En régime permanent, $i(t\gg\tau)\rightarrow\dfrac{-rF_0}{B\ell}$, le courant induit est contant, car les forces Laplace compensent parfaitement la force de l'opérateur, $x(t)$ évolue linéaire (mouvement rectiligne uniforme).

5

$$P_L = F_L v(t)$$
$$P_L = B\ell i(t)v(t) < 0 \quad \text{car } i<0 \quad \forall \quad t>0$$
$$P_{\text{ind}} = e_{\text{ind}} i(t)$$
$$P_{\text{ind}} = -B\ell v(t)i(t) > 0$$

D'où l'on constate que $P_L + P_{ind} = 0$, l'intégralité de la puissance est transmise par induction.

III.A.3 Courant de Foucault



Principe du freinage par courant de Foucault.

À connaitre

Les lignes de courants se forment au sein d'un conducteur massif (pas de spire fermée), de tel sorte à générer un champ magnétique qui s'oppose au champ magnétique qui leur donne naissance.
Ceci, engendre nécessairement du freinage (freinage des trains ou rechargement véhicules électriques / hybride) ou un échauffement (chauffage par induction).

Remarque : le sujet vous guidera nécessairement sur l'établissement des équations électriques, car il ne sera plus possible d'utiliser les méthodes vues sur le rail de Laplace.

III.B Les moteurs à champ tournant

Les moteurs linéaires de type rail de *Laplace* sont pratiques pour comprendre le principe de l'induction, mais pas forcément pour réaliser des moteurs ou des génératrices.

Nous allons plutôt chercher à réaliser ou utiliser des mouvements de rotation.
Nous rappelons le couple des forces de Laplace sur une boucle fermée :

$$\Gamma = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}_ext$$

III.B.1 Moteur à courant continu

À connaitre

Principe de fonctionnement du moteur / génératrice à courant continu. Inconvénient des balais collecteurs : frottements et à changer.

ajouter animation moteur à cc

III.B.2 Moteur synchrone

À connaitre

Principe de fonctionnement du moteur / génératrice synchrone. Aucun contact, aucune usure. Inconvénient ; assistance au démarrage nécessaire (plus un problème avec l'électronique moderne).

ajouter animation moteur synchrone

III.B.3 Moteur asynchrone

À connaitre

Principe de fonctionnement du moteur / génératrice asynchrone. $\omega_s < \omega_B$, contrôle en vitesse plus complexe.

ajouter animation moteur asynchrone