

Chapitre 1 : Pratiques calculatoires.

I Étude d'équations et d'inéquations

A Propriétés

Proposition 1

Les propriétés ci-dessous sont valables pour les 5 symboles "=", "≥", "≤", ">" et "<".

☞ **Transitivité** : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y) \text{ et } (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

☞ **Compatibilité avec l'addition** : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$

☞ **Compatibilité avec la multiplication** :

➤ $\forall x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}_+^*, x \leq y \Leftrightarrow x \times z \leq y \times z$

➤ $\forall x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}_-^*, x \leq y \Leftrightarrow x \times z \geq y \times z$



Remarque 1. ☞ La soustraction revient à additionner l'opposé et la division revient à multiplier par l'inverse. On a donc les mêmes propriétés pour la soustraction et la division.



Exercice 1. Résoudre les inégalités :

a) $3 \leq 2x + 9$

b) $5x - 2 \geq 8x - 5$

c) $\frac{2x}{x-1} \geq 2$ si $x > 1$.

Corolaire 2

Les propriétés ci-dessous sont valables pour les 5 symboles "=", "≥", "≤", ">" et "<".

☞ **Compatibilité avec l'addition** : $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}, (x \leq y) \text{ et } (x' \leq y') \Rightarrow x + x' \leq y + y'$

☞ **Compatibilité avec la multiplication** : $\forall x, x', y, y' \in \mathbb{R}_+^*, (x \leq y) \text{ et } (x' \leq y') \Rightarrow x \times x' \leq y \times y'$



Remarque 2. ☞ Attention ces propriétés ne fonctionnent pas si les nombres sont négatifs où si l'on fait un quotient.



Exemple 1. ☞ Soit $x \in [0, 2]$. Encadrement des expressions :

a) $f(x) = (3x + 1)(x + 1)$

b) $g(x) = \frac{3x + 1}{x + 1}$

Interprétation graphique.



Exercice 2. Montrer que : $2 \leq x \Rightarrow 20 \leq (3x + 4)\sqrt{x + 2}$



Exercice 3. Montrer que pour $x \in [0, 3]$, on a : $2 \leq \frac{3x + 4}{\sqrt{x + 1}} \leq 13$.

Attention, vous commencerez par montrer l'encadrement :

$$4 \leq 3x + 4 \leq 13$$

Puis :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \leq 1$$

Puis, vous pourrez conclure.

a) $3 \leq 2x + 9$

b) $5x - 2 \geq 8x - 5$

c) $\frac{2x}{x-1} \geq 2 \text{ si } x > 1.$

a) $3 \leq 2x + 9 \Leftrightarrow -6 \leq 2x \Leftrightarrow -3 \leq x$

$S = [-3; +\infty[$

b) $5x - 2 \geq 8x - 5 \Leftrightarrow -2 + 5 \geq 8x - 5x$

$3 \geq 3x$

$1 \geq x$

$S =]-\infty; 1]$

c) $\frac{2x}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - 2 \geq 0$

$2x \geq 2(x-1)$

$0 \geq -2$

$S =]1; +\infty[$

Sur $\mathbb{R}$ $\frac{2x}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - 2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{2x - 2(x-1)}{x-1} \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 > 0$

$\begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \leq x'+y' \\ x-y \leq x'-y' \end{cases} \Rightarrow x \cdot y \leq x' \cdot y'$

Exemple 1: a) $x \in [0; 2]$ $f(x) = (3x+1)x(x+1)$

$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 3x \leq 6 \\ 1 \leq x+1 \leq 3 \end{cases}$

$\Rightarrow 1 \leq (3x+1)(x+1) \leq 7 \times 3$

$\Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 21$

$\begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \Rightarrow xy \leq x'y'$

b) $g(x) = \frac{3x+1}{x+1} = (3x+1) \times \frac{1}{x+1}$

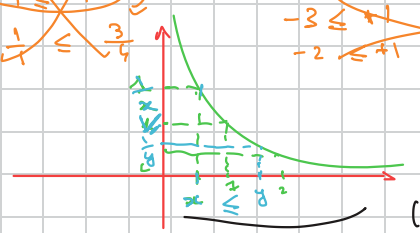
$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq 3x+1 \leq 7 \\ 1 \leq x+1 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq 3x+1 \leq 7 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{3x+1}{x+1} \leq 7$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 7$

$\begin{cases} 1 \leq 3x+1 \leq 7 \\ 1 \leq x+1 \leq 3 \end{cases}$

$x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$



Ex2: $x \geq 2$

* Pour $(3x+4)$: $2 \leq x \Rightarrow 6 \leq 3x \Rightarrow 10 \leq 3x+4$

* Pour $\sqrt{x+2}$: $2 \leq x \Rightarrow 4 \leq x+2 \Rightarrow \sqrt{4} \leq \sqrt{x+2} \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x+2}$

donc $10 \times 2 \leq (3x+4)\sqrt{x+2}$ donc $20 \leq (3x+4)\sqrt{x+2}$

Ex3: $0 \leq x \leq 3$

$\frac{3x+4}{\sqrt{x+1}} = (3x+4) \times \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

* Pour $(3x+4)$: $0 \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq 3x \leq 9 \Rightarrow 4 \leq 3x+4 \leq 13$

* Pour $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$: $0 \leq x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$

Donc $4 \times \frac{1}{2} \leq (3x+4) \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 13 \times 1 \Rightarrow 2 \leq \frac{3x+4}{\sqrt{x+1}} \leq 13$

$(*) \Rightarrow$

B Inégalité et variation de fonctions

Définition 1

Soit f une fonction définie d'un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dira que f est croissante sur I si :

$$\forall a, b \in I, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

On dira que f est décroissante sur I si :

$$\forall a, b \in I, a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$



Remarque 3. $\Leftrightarrow$ On parle de croissance stricte (ou de décroissance stricte) si les inégalités de la définition précédente sont strictes.



Exemple 2. $\Leftrightarrow$ Étude des variations de la fonction **carré**



Exemple 3. $\Leftrightarrow$ Étude des variations de la fonction **inverse**

C Décomposition en fonctions de référence.



Méthode 1

Certaines fonctions peuvent se décomposer en fonctions de référence. Cette décomposition permettra l'étude d'inégalité.



Exemple 4. $\Leftrightarrow$ Soit la fonction f définie sur $] -\infty, \frac{1}{3}[$ par :

$$\forall x \in] -\infty, \frac{1}{3}[, f(x) = \frac{-2}{\sqrt{-3x+1}} + 3$$

Remarque : Nous aurions pu noter cette fonction :

$$\begin{array}{ccc} f & : &] -\infty, \frac{1}{3}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-2}{\sqrt{-3x+1}} + 3 \end{array}$$

Décomposition de f en fonction de référence.

Encadrement de f sur $[-1, 0]$.



Exercice 4. Déterminer un encadrement sur $[1, 4]$ de la fonction g définie par :

$$\begin{array}{ccc} g & : & \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-1}{(2\sqrt{x}+1)^2+1} + 1 \end{array}$$



Exercice 5. Déterminer un encadrement sur $[0, 2]$ de la fonction h définie par :

$$\begin{array}{ccc} h & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -3\sqrt{\frac{1}{2x^2+1}} + 1 \end{array}$$

Exemple 2:

* Si $0 < a < b \Rightarrow \begin{cases} 0 < a' < ab \\ 0 < ab < b' \end{cases} \Rightarrow 0 < a' < b'$ Donc la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

* Si $a < b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a' > ab > 0 \\ ab > b' > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < b' < a'$ Donc la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$x \mapsto 2x$$

$$x \mapsto x+1$$

$$x \mapsto x^2$$

$$x \mapsto x+1$$

$$x \mapsto \frac{1}{2x}$$

$$x \mapsto -x$$

$$x \mapsto x+1$$

$$1 \leq x \leq 4 \Rightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{4} \Rightarrow 2 \leq 2\sqrt{x} \leq 4 \Rightarrow 3 \leq 2\sqrt{x}+1 \leq 5$$

$$\Rightarrow 9 \leq (2\sqrt{x}+1)^2 \leq 25 \Rightarrow 10 \leq (2\sqrt{x}+1)^2+1 \leq 26$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{(2\sqrt{x}+1)^2+1} \leq \frac{1}{26}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{(2\sqrt{x}+1)^2+1} \leq \frac{1}{26}$$

$$\frac{2-2}{(2x-1)(-3x+1)}$$

A(x)

$$S =]-\infty; 1[$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{1}{x-1} > 3$$

$$\frac{x}{-3x+4}$$

$$\frac{x}{2-1}$$

$$\frac{-3x+4}{x-1}$$

Ex 6

$$a) \quad \frac{2x-1}{(x-1)(-3x-2)} \geq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
2x-1	-	-	0	+	+
x-1	-	-	-	0	+
-3x-2	+	0	-	-	-
$\frac{2x-1}{(x-1)(-3x-2)}$	+	+	+	+	+

$$S =]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]\frac{1}{2}; 1[$$

$$\frac{1}{2x-1} > 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2x-1} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-3(2x-1)}{2x-1} = \frac{-6x+4}{2x-1} > 0$$

	$-\infty$	$1/2$	$2/3$	$+\infty$
$-6x+4$	+	+	0	-
$2x-1$	-	0	+	+
$\frac{-6x+4}{2x-1}$	-	+	0	-

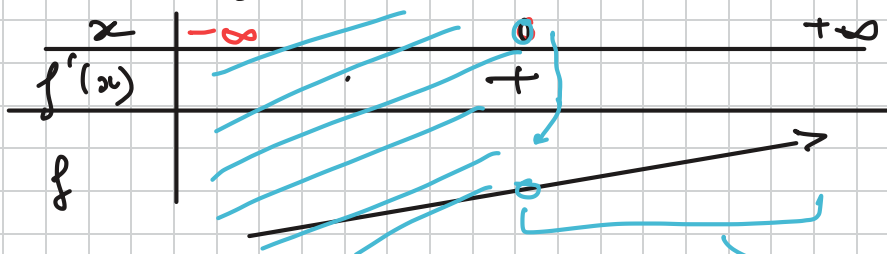
$$S =]\frac{1}{2}; \frac{2}{3}[$$

Exemple 6: (a) $\sin(x) \leq x \Leftrightarrow \underline{0 \leq x - \sin(x)}$
 $= f(x)$

$$f'(x) = 1 - \cos(x)$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow 1 \geq -\cos(x) \geq -1 \Rightarrow 2 \geq 1 - \cos(x) \geq 0$$

Donc $f'(x) \geq 0$



$$f(0) = 0 - \sin(0) = 0$$

D'après le T.V. $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x - \sin(x) \geq 0$$

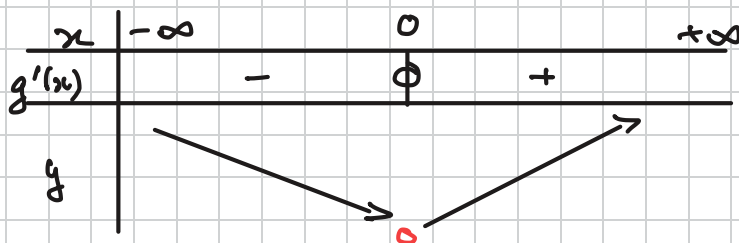
$$\Rightarrow x \geq \sin(x)$$

(b) $e^x \geq x+1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$

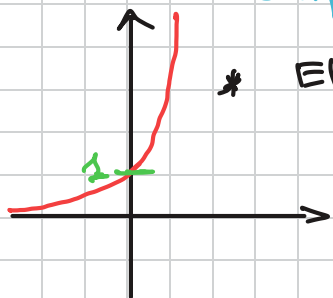
On pose $g(x) = e^x - x - 1$ donc $g'(x) = e^x - 1$

* Etude du signe de $g'(x)$:

$$g'(x) = e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow \underline{x \geq \ln(1) = 0}$$



$$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$$



Ex 7: $\ln(x) \leq x-1 \Rightarrow 0 \leq x-1-\ln(x)$

$$\ln(x) - x + 1 \leq 0$$

$f(x)$

On pose $R(x) = x-1-\ln(x)$ donc $R'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Ici $x \in \mathbb{R}^{++}$

* Etude du signe de $R'(x)$:

(1) $1 - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \geq 1$

(2) $1 - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-\infty$	-	0	+
x	-	0	+	+
$\frac{x-1}{x}$	+	-	0	+

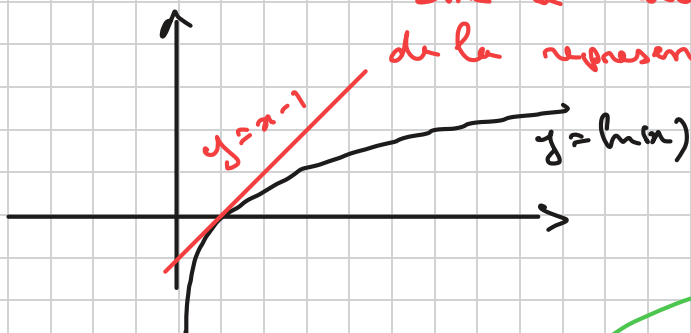
$$R(1) = 1 - 1 - \ln(1) = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$R'(x)$	-	0	+
$R(x)$			

On a donc

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad x-1-\ln(x) \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq \ln(x)$$

Donc la droite d'équation $y = x-1$ est au dessus de la représentation graphique de $\ln$.



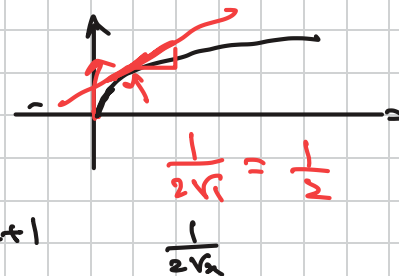
(b) $2\sqrt{x} \leq x+1 \Leftrightarrow 0 \leq x+1-2\sqrt{x}$

On pose $\alpha(x) = x+1-2\sqrt{x}$ donc $\alpha'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\alpha'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$$

x	0	1	$+\infty$
$\alpha'(x)$	-	0	+
α			

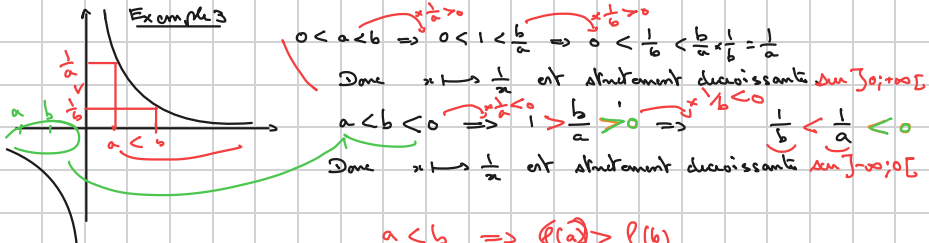
$$\alpha(1) = 1+1-2\sqrt{1} = 0$$



Donc $\forall x \in]0; +\infty[\quad \alpha(x) \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} \leq x+1$

La droite d'équation $y = x+1$ est au dessus de la rep. graphique de $x \mapsto 2\sqrt{x}$

Exemple 3



$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

Exemple 4:

$$f(x) = -2x \frac{1}{\sqrt{-3x+1}} + 3$$

$x \mapsto -3x \downarrow \text{sur } \mathbb{R}$
 $x \mapsto x+1 \uparrow \text{sur } \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x} \uparrow \text{sur } \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto \frac{1}{x} \downarrow \text{sur }]0; +\infty[$
 $x \mapsto -2x \downarrow \text{sur } \mathbb{R}$
 $x \mapsto x+3 \uparrow \text{sur } \mathbb{R}$

$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 3 \geq -3x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq -3x+1 \geq 1$
 $\Rightarrow \sqrt{4} \geq \sqrt{-3x+1} \geq \sqrt{1} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{-3x+1}} \leq 1$
 $\Rightarrow -1 \geq -2x \frac{1}{\sqrt{-3x+1}} \geq -2 \Rightarrow 2 \geq -2x \frac{1}{\sqrt{-3x+1}} + 3 \geq 1$
 $f(x)$

Donc si $x \in [-1; 0]$ alors $f(x) \in [1; 2]$

Ex 5:

$$h(x) = -3 \sqrt{\frac{1}{2x^2+1}} + 1$$

$x \mapsto x^2 \downarrow \text{sur } \mathbb{R}^-$
 $x \mapsto 2x \uparrow \text{sur } \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto x+1 \uparrow \text{sur } \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x} \downarrow \text{sur }]0; +\infty[$
 $x \mapsto \sqrt{x} \uparrow \text{sur } \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto -3x \downarrow \text{sur } \mathbb{R}$
 $x \mapsto x+1 \uparrow \text{sur } \mathbb{R}$

Si $-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow 4 \geq x^2 \geq 0 \Rightarrow 8 \geq 2x^2+1 \geq 1$
 $\Rightarrow \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2x^2+1} \geq \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2x^2+1} \leq 1$
 $\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \leq \sqrt{\frac{1}{2x^2+1}} \leq 1 \Rightarrow -1 \geq -3 \sqrt{\frac{1}{2x^2+1}} \geq -3$
 $\Rightarrow 0 \geq h(x) \geq -2$

Rq ① $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq h(x) \leq \frac{-3}{\sqrt{3}} + 1$

sur $[-2; 1]$ $h(x) \in [-2; 0]$

Rq ② Si $a \leq b \leq 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow h(a) \geq h(b) \geq -2$
 On montre aussi que h est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}^-$.

$$\textcircled{b} \quad \frac{1}{x-1} > \underline{3} \Rightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{3}{1} \stackrel{\times (x-1)}{> 0}$$

$$\Rightarrow \frac{1-3(x-1)}{x-1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3x+4}{x-1} > 0$$

x		1		$\frac{4}{3}$	
$-3x+4$	+		+	0	-
$x-1$	-	0	+		+
$\frac{-3x+4}{x-1}$	-		+	0	-

$$S =]1; \frac{4}{3}[$$

Exercice 6/1:

a. $\frac{2x-1}{(x-1)(-3x-2)} \geq 0$

$\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{2}{3}$

x	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	
$2x-1$	-	-	0	+
$x-1$	-	-	-	0
$-3x-2$	+	0	-	-
Adm	+	-	+	-

$S = [-\frac{2}{3}; 1]$

$S =]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup [\frac{1}{2}; 1[$

b. $\frac{1}{2x-1} > 3 \Rightarrow \frac{1}{2x-1}$

$$b) \frac{1}{2x-1} > 3 \Rightarrow \frac{1}{2x-1} - 3 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 3(2x-1)}{2x-1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{4-6x}{2x-1} > 0$$

x		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
$4-6x$	+	0	-	-
$2x-1$	-	-	0	+
$\frac{4-6x}{2x-1}$	-	0	+	-

~~$$\text{done } S =]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$$~~

x		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	
$4-6x$	+	+	0	-
$2x-1$	-	0	+	+
	-	+	0	-

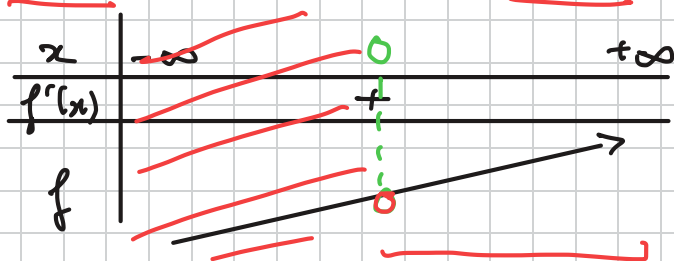
$$S =]\frac{1}{2}; \frac{2}{3}[$$

Exemple 6:

$$\sin(x) \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x - \sin(x)$$

On pose $f(x) = x - \sin(x)$ donc $f'(x) = \underline{1 - \cos(x)}$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow 1 \geq -\cos(x) \geq -1 \Rightarrow 2 \geq 1 - \cos(x) \geq 0$$



$$f(0) = 0 - \sin(0) = 0$$

D'après le T.V $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$

$$x - \sin(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq \sin(x).$$

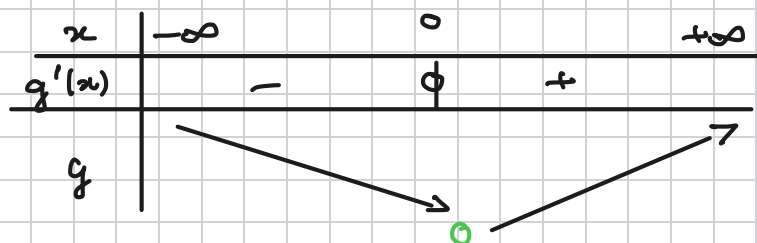
Int graphique la droite d'équation $y=x$ est au dessus de la rep. graphique du $\sin$.

⑥ $e^x \geq x+1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$

On pose $g(x) = e^x - x - 1$ donc $g'(x) = \underline{e^x - 1}$

$$g'(x) = e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln(1) = 0$$

$\ln$ est $\uparrow$ sur $\mathbb{R}^+$ $\ln(e^x) = x$



$$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^x \geq x+1$

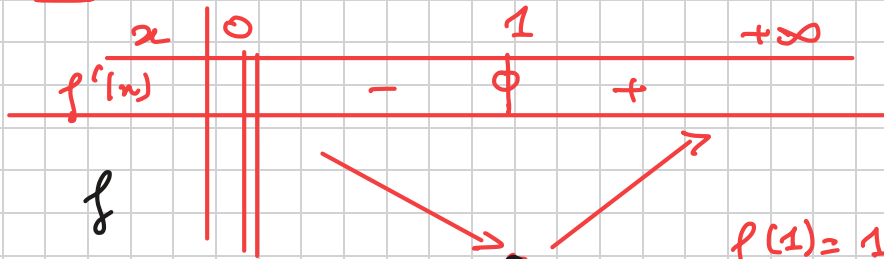
Donc la rep. graphique de la fonction exp. est au dessus de la droite d'équation $y=x+1$.

$$\ln(x) \leq x-1 \Rightarrow 0 \leq \underbrace{x-1-\ln(x)}_{f(x)}$$

avec $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\underline{1 - \frac{1}{x} \geq 0} \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{x} \xRightarrow{x \neq 0} \underline{x \geq 1}$$



$$f(1) = 1 - 1 - \ln(1) = 0$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$f(x) = x-1-\ln(x) \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq \ln(x)$$

Exercise 6/1:

a. $\frac{2x-1}{(x-1)(-3x-2)} \geq 0$

$\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{2}{3}$

x	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	
$2x-1$	-	-	0	+
$x-1$	-	-	-	0
$-3x-2$	+	0	-	-
Adm	+	-	+	-

$S = \left[-\frac{2}{3}; 1\right]$

D Tableaux de signes



Méthode 2

Pour étudier une inégalité un peu *complexe*, une méthode consiste :

1. Mettre tout du même côté et se retrouver à devoir faire une étude de signes.
2. Puis trouver la forme la plus factorisée possible. (sachant qu'un quotient s'étudie comme un produit)
3. Puis enfin faire un tableau de signes.



Exemple 5. $\Leftrightarrow$ Résoudre :

$$\text{a) } \frac{x-2}{(2x-1)(-3x+1)} \geq 0$$

$$\text{b) } \frac{1}{x-1} > 3$$



Exercice 6. Résoudre les inégalités :

$$\text{a) } \frac{2x-1}{(x-1)(-3x-2)} \geq 0$$

$$\text{b) } \frac{1}{2x-1} > 3$$

E Étude d'inéquation par étude de fonctions.



Méthode 3

L'étude d'une fonction après le calcul de la dérivée puis l'élaboration du tableau de variations peut permettre l'étude d'inégalité.



Exemple 6. $\Leftrightarrow$ Nous pouvons démontrer des inégalités par étude de fonction.

$$\text{a) Montrons que : } \forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leq x$$

$$\text{b) Montrons que : } \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$



Exercice 7. a) Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$. Interprétez graphiquement ce résultat.

b) Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, 2\sqrt{x} \leq x + 1$. Interprétez graphiquement ce résultat.

(On rappelle que la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.)

F Valeur absolue et distance

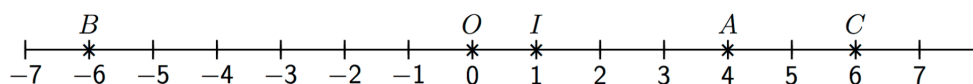
Définition 2

Considérons la droite réelle orientée :

La distance entre A et B est $AB = |b - a|$



Exercice 8. Donner les abscisses des points A, B, C, O et I puis déterminer les distances AB, BA, AC, AI et AO :



$$AB = |-6 - 4| = 10 \quad BA = |6 - (-4)| = |10| = 10$$

$$AC = |6 - 4| = 2 \quad AI = |1 - 4| = |-3| = 3$$

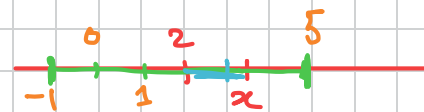
$$AO = |0 - 4| = |-4| = 4$$

Exemple 7:

(a) $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

(b) $|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5 \quad \text{(+2)}$$



(c) $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

x	-2	0
$ x+2 $	$-(x+2) = -x-2$	$x+2$
$ x $	$-x$	x
$ x+2 + x $	$-2x-2$	$2x+2$

1^{ère} cas $x \leq -2$

$$|x+2| + |x| = -2x-2 \leq 3 \Leftrightarrow -2x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

$$S_1 = \left[-\frac{5}{2}; -2\right]$$

2^{ème} cas $-2 \leq x \leq 0$

$$|x+2| + |x| = 2 \leq 3 \quad S_2 = [-2; 0]$$

3^{ème} cas $x \geq 0$

$$|x+2| + |x| = 2x+2 \leq 3 \Leftrightarrow 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

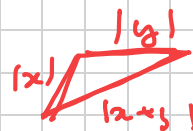
$$S_3 = \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

Donc $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Ex (a)

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$



Exemple: Si $x, y \in \mathbb{R}$ on a: $||x|-|y|| \leq |x-y|$

On remarque $x = x - y + y$

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \text{ donc } |x| - |y| \leq |x - y|$$

x et y jouent le m. rôle donc:

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

Donc $||y| - |x|| \leq |x - y|$

Ex II: ① Mg pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

② Mg $\begin{cases} |x - 2| \leq 0,1 \\ |y - 3| \leq 0,2 \end{cases} \Rightarrow |x + y - 5| \leq 0,3$

① Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a: $|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|$

② Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $|x - 2| \leq 0,1$ et $|y - 3| \leq 0,2$ compatible avec l'add.

$|x + y - 5| = |x - 2 + y - 3| \leq |x - 2| + |y - 3| \leq 0,3$
Inégalité triangulaire

Exemple 8: $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ $a = 2, b = 3$ et $c = -5$

discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 49$.

(F.C) $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 2} = -\frac{3}{4}$, $\beta = f(\alpha) = 2 \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{3}{4}\right) - 5$
 $= \frac{9}{8} - \frac{18}{8} - \frac{40}{8} = -\frac{49}{8}$

Donc $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 2 \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$

Recherche des racines:

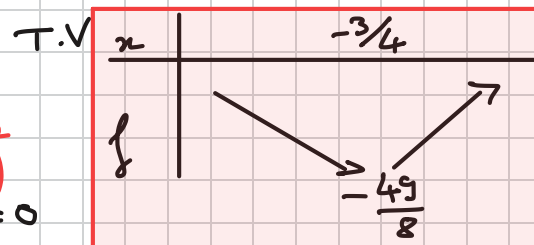
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(x + \frac{3}{4} - \frac{7}{4}\right) \left(x + \frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1) \left(x + \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{5}{2}$$



racines

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Exercice

Faire de même pour

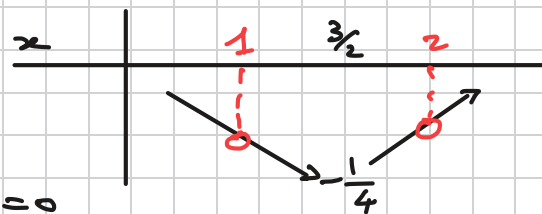
$$g(x) = 1x^2 - 3x + 2$$

$a=1, b=-3, c=2$

$$\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$$

$$\alpha = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2} \quad \beta = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=1$$

Dém 1: Pour $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$= a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$\alpha = -\frac{b}{2a}$

Fin dem 1

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \right]$$
$$= a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0(x)$$

$$(*) \Leftrightarrow x = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

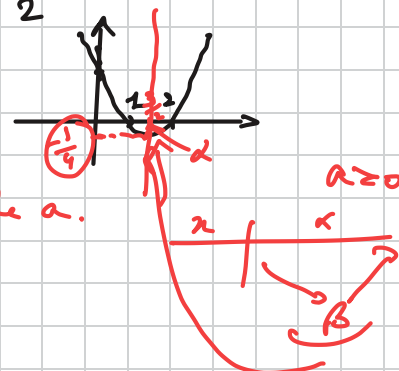
$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2} = 1$$

Forme factorisée: $f(x) = 1x(x-2)(x-1)$.

x	1	2
f(x)	+	-

Signe de a.



$$|2x+1| - |1-x| \leq 1$$

$$* 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$* 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

x	$-\frac{1}{2}$	1
$ 2x+1 $	$-2x-1$	$2x+1$
$ 1-x $	$1-x$	$x-1$
$ 2x+1 - 1-x $	$-x-2$	$x+2$

1^{ère} cas $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}]$

$$|2x+1| - |1-x| = -x-2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x \quad S_1 = [-3; -\frac{1}{2}]$$

2^{ème} cas $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$$|2x+1| - |1-x| = 3x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3} \quad S_2 = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}]$$

3^{ème} cas $x \geq 1$

$$|2x+1| - |1-x| = x+2 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \quad S_3 = \emptyset$$

Donc $S = [-3; \frac{1}{3}]$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Exemple: Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tq: $||x| - |y|| \leq |x-y|$

On a $x = \underbrace{x-y}_{\text{inégalité triangulaire}} + y$

donc $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$

donc: $|x| - |y| \leq |x-y|$

Comme x et y jouent le même rôle:

$$|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$$

Donc $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Ex: ① tq $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

② en utilisant l'inégalité triangulaire tq

$$\begin{cases} |x-2| \leq 0,1 \\ |y-3| \leq 0,2 \end{cases} \Rightarrow |x+y-5| \leq 0,3$$

Ex: ① $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

② en utilisant l'inégalité triangulaire $\forall y$

$$\begin{cases} |x-2| \leq 0,1 \\ |y-3| \leq 0,2 \end{cases} \Rightarrow |x+y-5| \leq 0,3$$

① Soit x, y et z trois reals:

$$|x-z| = |x-y + y-z| \leq |x-y| + |y-z|$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

② $|x-2| \leq 0,1$ et $|y-3| \leq 0,2$

$$|x+y-5| = |x-2 + y-3| \leq |x-2| + |y-3| \leq 0,3$$

② en utilisant la question ①.

$$|x+y-5| = |x-(5-y)| \leq |x-2| + \frac{|2-(5-y)|}{|y-3|} \leq 0,3$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Dem 1: $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Si on pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ on a:

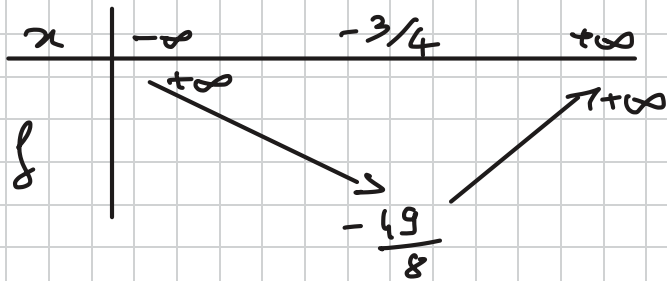
$$f(x) = a(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Exemple 8: $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \beta &= f(\alpha) = 2 \times \left(-\frac{3}{4} \right)^2 + 3 \times \left(-\frac{3}{4} \right) - 5 \\ &= \frac{9}{8} - \frac{18}{8} - \frac{40}{8} = -\frac{49}{8} \end{aligned}$$



$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Forme canonique : $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} = 0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{4} - \frac{7}{4}\right) \left(x + \frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(x + \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{5}{2}$$

racines

Ex 11: (a) $a=2, b=1, c=0$

(b) $f(x) = x(2x+1)$

(c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-\frac{1}{2}$ (d) $\Delta = 1$

(e) $\alpha = \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{4}$ $\beta = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$

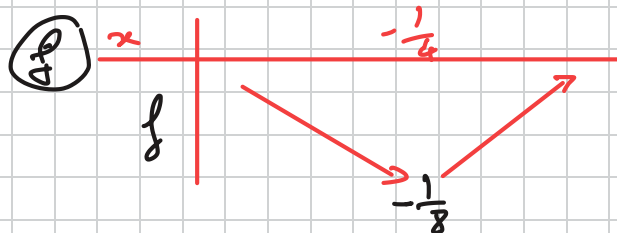
F.C $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$

O₂ $2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \geq -\frac{1}{8}$
 $\Rightarrow f(x) \geq -\frac{1}{8}$



Ré: on conclut de $-\frac{1}{8}$ que c'est le minimum de f .

(il y en a une infinité de minimum : -1 par exemple)
 en revanche $-\frac{1}{8}$ est le minimum de f et il est
 atteint en $-\frac{1}{4}$



Dem 1: $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \quad \Delta \quad * \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] \\
 &= a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\
 f(x) = 0 &\Leftrightarrow x = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &= -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
 \end{aligned}$$

Retour à l'exemple 8: $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

Déterminons les racines de f :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 49$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 - 7}{4} = -\frac{5}{2} \quad x_2 = \frac{-3 + 7}{4} = 1$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 2 \left(x + \frac{5}{2} \right) (x - 1) = (2x + 5)(x - 1)$$

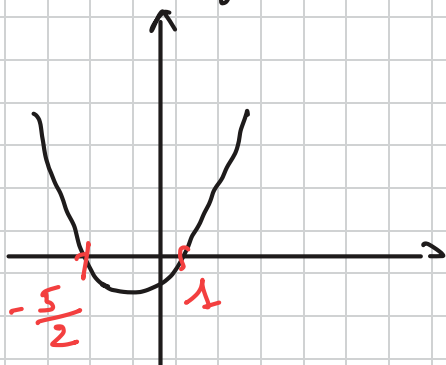


Tableau de signe

x	$-\frac{5}{2}$		1	
$f(x)$	+	ϕ	-	ϕ (+)

↑
signe de a

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-2)$$

$$= 1$$

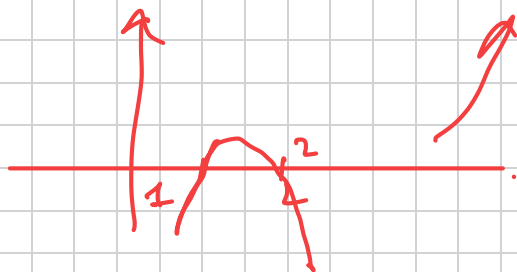
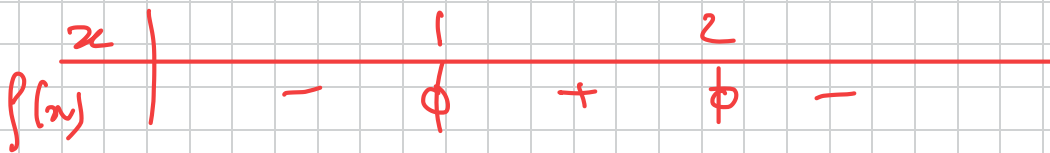
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{2 \times (-1)}$$

$$= 2$$

$$x_2 = 1$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= -(x - 2)(x - 1)$$



$$h(x) = x^2 + x + 1 \quad \Delta = -3 < 0$$

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

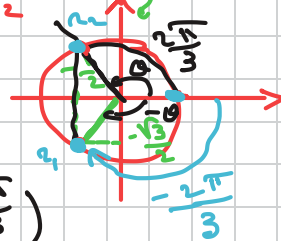
$$r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r_2 = \bar{r}_1$$

$$r_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$r_2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

$$h(x) = (x - e^{\frac{2i\pi}{3}})(x - e^{-\frac{2i\pi}{3}})$$



$$g(x) = (x - \alpha)^2$$

$$= a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \alpha = \alpha$$

$$\textcircled{a} \quad x^2 + bx + c = 2x^2 + 3x + 1$$

Ex: $\textcircled{a}$ $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ racines, Forme factorisée, Forme canonique
Tab. de signe, T.Y

$\textcircled{b}$ Idem avec $g(x) = x^2 - x + 1$.

$$\textcircled{a} \quad \Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 4 \quad x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times (-1)} = 3 \quad x_2 = 1$$

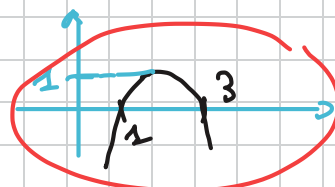
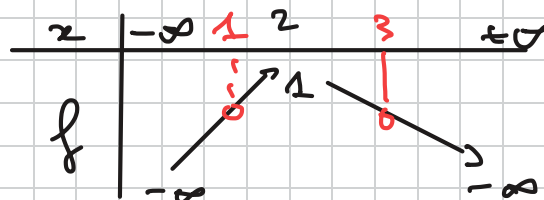
Forme factorisée : $f(x) = -(x-1)(x-3)$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

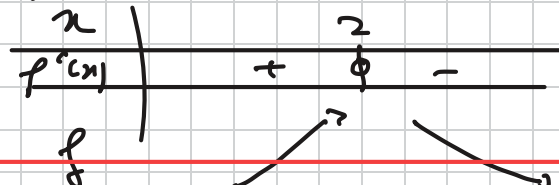
$$\beta = f(\alpha) = f(2) = -2^2 + 4 \times 2 - 3 = 1 \quad a < 0$$

$$\textcircled{FC} \quad f(x) = -(x-2)^2 + 1^2$$

$$= (1 - (x-2))(1 + (x-2)) = (3-x)(x-1)$$



$$f'(x) = -2x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$



$\textcircled{b}$ $\Delta = -3$, pas de racine réel.

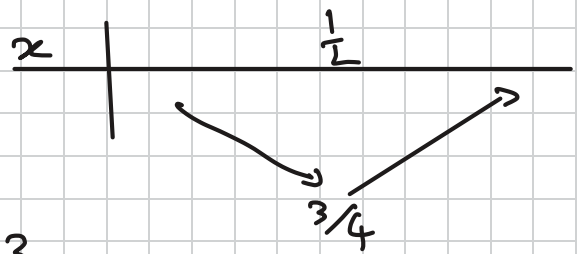
Pas de forme factorisée de $\mathbb{R}$.

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - 2 + 4}{4} = \frac{3}{4}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 0$

$$g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$



Exemple

pour $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

les racines sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

$$x_1, x_2 = 1 \times 3 = 3 ; \frac{c}{a} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Rq: on peut remarquer facilement que 1 est racine "évidente" de f . en effet $f(1) = -1^2 + 4 \times 1 - 3 = 0$

Donc $1 \times x_2 = \frac{c}{a} = 3$ donc $x_2 = 3$

ou $1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 4$ donc $x_2 = 4 - 1 = 3$

Dém (Prop 5):

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $\Delta > 0$ et x_1, x_2 racines de f , alors

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} -a(x_1 + x_2) = b \\ ax_1x_2 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Ex 13: (a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ $f(-1) = 0$ donc -1 racine.

Donc $-1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -3 \Rightarrow x_2 = -3 + 1 = -2$

(ou $-1 \times x_2 = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow x_2 = -2$)

(b) $g(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 - 2 = 0$ 2 racine

donc $2x_2 = \frac{-2}{2} = -1$ donc $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Rq: $g(x) = (x - 2)(2x + 1)$

(c) $h(-1) = 0$ donc $-x_1 = \frac{-2}{3}$ $x_1 = \frac{2}{3}$

Ex 14: (M) On recherche un polynôme du second dont les racines sont les 2 reals cherchés. Alors.

$$x_1, x_2 = 7 = \frac{c}{a} \text{ et } x_1 + x_2 = \frac{11}{2} = \frac{-b}{a}$$

On choisit $a = 1$ donc $c = 7$ et $b = -\frac{11}{2}$

Donc $f(x) = x^2 - \frac{11}{2}x + 7$

$$\Delta = \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 4 \times 7 = \frac{121}{4} - 28 = \frac{121}{4} - \frac{112}{4} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$x_1 = \frac{+\frac{11}{2} - \frac{3}{2}}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{\frac{11}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{2}$$

Effectivement $x_1 + x_2 = 2 + \frac{7}{2} = \frac{11}{2}$
 $x_1 x_2 = 7$

M2) On note α et β ces 2 nombres :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{11}{2} \\ \alpha \beta = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \beta + \beta^2 = \frac{11}{2} \beta \\ \alpha \beta = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 - \frac{11}{2} \beta + 7 = 0 \\ \alpha \beta = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \Rightarrow \alpha \cdot 2 = 7 \Rightarrow \alpha = \frac{7}{2} \\ \beta = \frac{7}{2} \Rightarrow \alpha \cdot \frac{7}{2} = 7 \Rightarrow \alpha = 2 \end{cases}$$

Exemple 10 : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$, $f(1) = 0$

donc on peut factoriser par $(x-1)$.

M1) On a $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

$$= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$

$$f(x) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

Donc

$$\begin{cases} a = 1 \\ b-a = 1 \\ c-b = 1 \\ -c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Donc $f(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$

M2)

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + x - 3 \\ - (x^3 - x^2) \\ \hline 2x^2 + x - 3 \\ - (2x^2 - 2x) \\ \hline 3x - 3 \\ - (3x - 3) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-1 \\ \hline x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

Donc $x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$

M3) $x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$

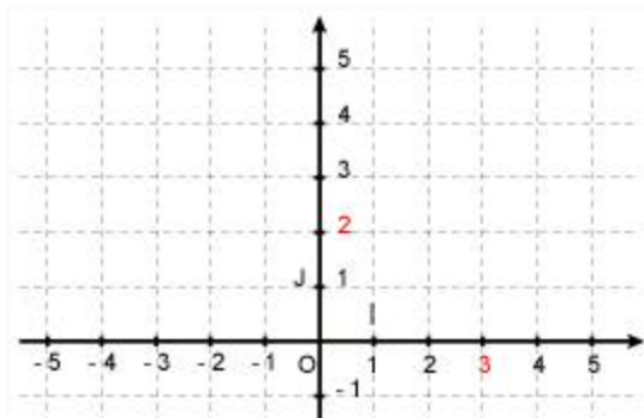
Définition 3

On définit ainsi la fonction valeur absolue comme la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



Exercice 9. Représentez la fonction valeur absolue sur le graphique ci-dessous :

**Proposition 3**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| = |x| \times |y|$$

$$\text{Inégalité triangulaire : } \forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$$



Remarque 4. Pour tous x réel, on a : $\sqrt{x^2} = |x|$. En revanche, l'on a $\sqrt{x^2} = x$ uniquement pour $x \geq 0$.



Exemple 7. Résolvons les inéquations

a) $|x| \leq 1$

b) $|x - 2| \leq 3$

c) $|x + 2| + |x| \leq 3$



Exercice 10. Résoudre les inéquations :

a) $|x| \leq 3$

b) $|x - 2| \leq 5$

c) $|x + 2| \geq 3$

II Équations, inéquations polynomiales

A Définition

Définition proposition 4

- ☞ On appelle **fonction polynomiale du second degré** (où trinôme) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec a , b et c des réels et $a \neq 0$. Ce sont les **coefficients** de la fonction polynomiale.

- ☞ On appelle **racine** de f tout nombre réel x tel que $f(x) = 0$.
- ☞ On appelle **discriminant** de $f(x) = ax^2 + bx + c$ le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.
- ☞ La fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette expression est appelée **forme canonique** de la fonction polynomiale f .
- ☞ On a alors : $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
- ☞ Variations :

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f		$\searrow$ β $\nearrow$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f		$\nearrow$ β $\searrow$	

| ☞ *Démonstration 1.*



Exemple 8. Déterminons les éléments définis dans la proposition ci-dessus pour la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 3x - 5$$



Exercice 11. Soit la fonction polynomiale :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^2 + x \end{aligned}$$

- Déterminer les coefficients a , b et c de f .
- Déterminer une factorisation de $f(x)$.
- Déterminer une racine de f .
- Déterminer le discriminant Δ de f .
- Déterminer la forme canonique de f et en déduire un réel λ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \lambda$$

- Déterminer le tableau de variation de f .

B Résolution d'(in)équations du second degré

Proposition 4

On considère $f(x) = ax^2 + bx + c$ et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue alors 3 cas :

☞ Si $\Delta > 0$ alors l'équation f possède 2 racines x_1 et x_2 telles que

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et f peut être factorisée sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. D'où le signe :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
$f(x)$	signe de a		0	signe de -a	0	signe de a

☞ Si $\Delta = 0$ alors l'équation f possède 1 unique racine x_0 appelé racine double, est :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

et f peut se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$. D'où le signe :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
	signe de a	0	signe de a

☞ Si $\Delta < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines complexes **conjuguées** telles que

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

et f peut être factorisée sous la forme $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

Son signe :

x	$-\infty$	$+\infty$
	signe de a	



Méthode 4

Pour étudier le signe d'un trinôme, nous commencerons par déterminer le déterminant puis les racines et enfin nous pourrions dresser le tableau de signes du trinôme.



Exemple 9. Déterminons la forme factorisée et le signe de la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 3x - 5$$



Exercice 12. Déterminer la forme factorisée et le tableau de signe des fonctions polynomiales suivantes :

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

b) $g(x) = x^2 - 4x + 4$

c) $h(x) = x^2 + x + 1$

C Relations entre racines et coefficients

Proposition 5

Si f est une fonction polynôme de degré 2 admettant deux racines x_1 et x_2 (c.a.d $\Delta \geq 0$ alors :

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{c}{a} \\ (x_1 + x_2) = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

 **Exercice 13.** Pour les polynômes suivants vérifier que l'une des 4 valeurs -2, -1, 1 ou 2 soient une racine et à l'aide des relations précédentes, déterminer la valeur de la deuxième racine.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

b) $g(x) = 2x^2 - 3x - 2$

c) $h(x) = 3x^2 + x - 2$

 **Exercice 14.** Trouver deux réels dont la somme est $\frac{11}{2}$ et le produit est 7.

D Factorisation d'un polynôme.

Proposition 6

Soit f une fonction polynomiale de degré n un entier non nul, admettant un réel a comme racine, alors il existe une fonction polynomiale g de degré $n - 1$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - a)g(x)$$



Méthode 5

Soit f une fonction polynomiale de degré n un entier non nul, admettant un réel a comme racine. Pour trouver une factorisation de f sous la forme $f(x) = (x - a)g(x)$:

- ☞ soit l'on procédera par *identification* en développant $(x - a)g(x)$
- ☞ soit l'on procédera par division *euclidienne de polynôme*.

Nous illustrons ces deux méthodes dans l'exemple ci-dessous.



Exemple 10. ☞ Factorisation de :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 + x^2 + x - 3 \end{aligned}$$

 **Exercice 15.** Nous allons étudier le signe de :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

1. Vérifier que $x_0 = \frac{1}{2}$ est bien une racine de f .
2. En déduire une factorisation de f sous la forme $(2x - 1)g(x)$ où g est un polynôme de degré 3 que l'on déterminera.
3. On considère le polynôme $x^3 - x^2 - x - 2$. Montrer que ce polynôme peut se factoriser sous la forme $(x - 2)h(x)$ où h est un trinôme que l'on déterminera.
4. Étudier le signe de f .