

Programme de colle TS 1 // semaine 2 du 21/09 au 24/09

Nous avons fait peu d'exercices sur la géométrie.

I Sommes et produits

- ☞ Notation et définition $\sum$ et $\prod$.
- ☞ Linéarité de $\sum$
- ☞ Changement d'indice :



Méthode 1

1. On exprime le nouvel indice en fonction de l'ancien puis inversement.
2. On détermine les nouvelles bornes et l'expression à sommer en fonction du nouvel indice.

- ☞ **Télescopage** : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ou complexes et m et n deux entiers tel que $m \leq n$, alors :

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$$



Méthode 2

La méthode par télescopage consiste à :

1. Reconnaître une expression de la forme $u_{k+1} - u_k$ et l'expression de u_k
2. Puis à appliquer la formule précédente.

- ☞ Une factorisation (où $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$$

- ☞ Conséquence, si $q \neq 1$:

$$1 + q + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

II Sommes et premières récurrences

- ☞ Principe de récurrence



Attention 1. uniquement appliqué aux sommes!!!

- ☞ Sommes de référence :

$$\star \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\star \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\star \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

☞ Coefficients binomiaux

★ Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

★ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a les propriétés :

$$\begin{aligned} \bullet \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 & \bullet \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\ \bullet \binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n & \bullet \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \end{aligned}$$

☞ Formule du binôme : Soient a et b deux réels et n un entier naturel : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

III Généralités sur les vecteurs

☞ Définition, multiplication par un réel, somme, propriétés algébriques...

☞ Définition d'une famille liée et d'une famille libre : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$.

□ Soient λ et μ deux réels. L'expression $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est appelée combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. (On peut généraliser cette définition à n vecteurs)

□ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. La famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ sera dite liée, si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

□ La famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ sera dite libre si elle n'est pas liée. C'est-à-dire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda, \mu) = (0, 0)$$

□ Nous pouvons généraliser les définitions précédentes à une famille de n vecteurs.



Attention 2. Une famille est un n -uplet composé de n vecteurs.

☞ Colinéarité de deux vecteurs : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront dit colinéaires si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{u} = \lambda\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda\vec{u}$$

Ceci est équivalent à dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.

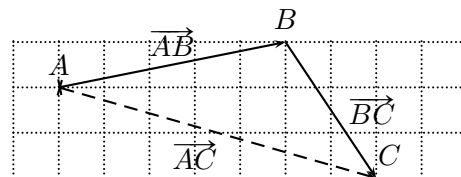
☞ Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. Alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est liée}$$

☞ Vecteurs et configuration : Relation de Chasles, Règle du parallélogramme...

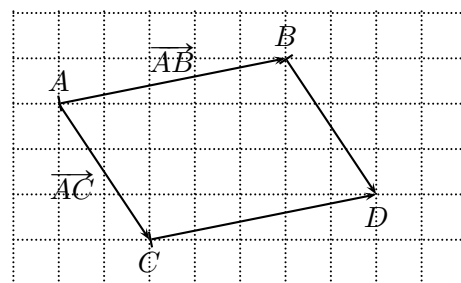
Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C de l'espace on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Règle du parallélogramme

Soit A, B et C trois points distincts. La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$, où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



IV Bases

- ☞ Définition : dans le plan vectoriel, une famille libre de deux vecteurs est génératrice et c'est donc une base (c.a.d libre et génératrice)

☞ Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une **famille libre** de vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. Alors :

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2, \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

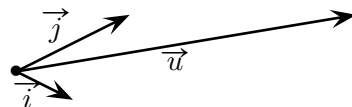
☞ On dit alors que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **famille génératrice** de $\vec{\mathcal{P}}$ puisque tout vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$ peut être *généralisé* (c'est-à-dire *s'écrire comme combinaison linéaire de*) par $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

☞ Puisque $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une famille **libre et génératrice**, elle sera appelée une **base** de $\vec{\mathcal{P}}$.

☞ Le couple (x, y) souvent noté $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (en colonne) pour les vecteurs sera appelé les **coordonnées cartésiennes** de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$.

☞ Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux alors la base $\mathcal{B}$ est dite **orthogonale**, si de plus ces deux vecteurs sont de norme 1 alors $\mathcal{B}$ est dite **orthonormée** (ou **orthonormale**)

☞ Si enfin la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ est positif la base est dite **directe** (elle sera dite **indirecte** sinon)



- ☞ Décomposition dans une base, combinaison linéaire...

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

$$\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- ☞ Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base si l'on connaît les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne base.

- ☞ Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans l'ancienne base si l'on connaît les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne base. (exercice 7)

- ☞ Savoir décomposer dans une base.

- ☞ Calculs sur les coordonnées : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \text{ On a :}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

$$\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

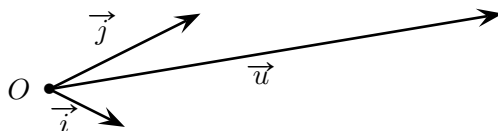
V Géométrie repérée

- ☞ Définition et proposition :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une famille libre de vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$ et O un point de $\mathcal{P}$. Alors :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$. Le couple (x, y) est constitué des coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux alors le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit **orthogonal**, si de plus ces deux vecteurs sont de norme 1 alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit **orthonormé** (ou **orthonormal**) si enfin la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ est positif le repère est dit **direct** (elle sera dite **indirect** sinon)

☞ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$ tel que dans ce repère, on ait $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. On a :

$$\text{☞ } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

$$\text{☞ Si } I \text{ milieu de } [AB], I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

☞ Représentation paramétrique d'une droite : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$. Soit d la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (c'est que $\vec{u}$ est un vecteur non nul de même direction que d). Alors :

$$M(x, y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

On obtient alors la **représentation paramétrique** de d :

$$d : \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

VI Barycentres

Pas de barycentres.

VII Éléments de cours à connaître

1. Apprendre la démonstration d'une des trois sommes de références.
2. Démonstration des propriétés :

$$\begin{array}{ll}
 \bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\
 \bullet \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n & \bullet \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}
 \end{array}$$

3. Deux méthode de calcul de la somme ci-dessous (l'étudiant aura écrit les deux méthodes mais il pourra choisir le développement qui veut) :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

4. Savoir compléter :

$$\begin{array}{lll}
 \bullet \sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = \dots & \bullet \sum_{k=0}^n k^2 = \dots & \bullet \binom{n}{1} = \dots \\
 \bullet x^n - y^n = \dots & \bullet \sum_{k=0}^n k^3 = \dots & \bullet \binom{n}{k} = \dots \\
 \bullet 1 + q + \dots + q^n = \dots & \bullet \binom{n}{k} = \dots & \bullet \binom{n+1}{k+1} = \dots \\
 \bullet \sum_{k=0}^n k = \dots & \bullet \binom{n}{0} = \dots & \bullet (a+b)^n = \dots
 \end{array}$$

5. L'exercice du cours (Si vous changer les valeurs, choisir des valeurs pour lesquelles les calculs sont simples). On considère le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ (c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forme une famille libre ou ne sont pas colinéaires). On considère $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

(a) Justifier que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

(b) On a $\vec{w}$ et $\vec{n}$ ont pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ et $\vec{n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

(c) On a $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ ont pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ dans la base $\mathcal{B}'$. **deuxième vidéo**

(d) Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$. Déterminer les formules permettant de passer d'un coordonnées dans $\mathcal{B}$ au coordonnées dans $\mathcal{B}'$ et inversement.

6. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

(a) Déterminer un point A , un vecteur directeur et une équation cartésienne de la droite d de représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) Déterminer une équation cartésienne de d .

(c) Donner la représentation paramétrique de la droite Δ passant par $B(1, -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(d) Déterminer l'intersection entre d et Δ .