

DS 1 du 18 septembre 20026 1h30 heures

– Sommes et pratiques calculatoires –

Exercice 1

Montrer que

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

On pourra étudier la fonction

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

Exercice 2

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation

$$(E_m) \quad e^{2x} - 2me^x + m + 2 = 0.$$

1. **Cas particulier.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_3) . On pourra poser $X = e^x$. On précisera la condition vérifiée par X .
2. On considère maintenant m quelconque. En posant $X = e^x$, montrer que la résolution de (E_m) conduit à étudier

$$X^2 - 2mX + m + 2 = 0$$

avec $X > 0$.

3. Déterminer, suivant les valeurs de m , le nombre de racines réelles du polynôme

$$P_m(X) = X^2 - 2mX + m + 2.$$

4. Lorsque P_m possède deux racines réelles X_1 et X_2 , exprimer $X_1 + X_2$ et X_1X_2 en fonction de m .
5. En déduire, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions réelles de l'équation (E_m) .

Exercice 3

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3.$$

Retrouver ensuite ce résultat sans récurrence, en développant la somme et en utilisant les formules de référence.

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 2^k 3^{6-k}$

d) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k$

e) $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} 2^k$

c) $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

1. À l'aide de la formule du binôme de Newton, donner une expression simple de $f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ de deux façons :
 - a) en utilisant l'expression de $f(x)$ obtenue à la question précédente ;
 - b) en dérivant directement la somme définissant $f(x)$.
3. En évaluant $f'(x)$ en une valeur bien choisie, déterminer

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

4. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k}.$$

Exercice 6

On note

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n k, \quad \beta_n = \sum_{k=0}^n k^2, \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^n k^3.$$

On rappelle

$$\alpha_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

L'objectif de cet exercice est de retrouver, sans récurrence, une formule pour γ_n .

On considère

$$S_n = \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4).$$

1. Calculer S_n par télescopage.
2. Développer $(k+1)^4 - k^4$.
3. En déduire que

$$S_n = 4\gamma_n + 6\beta_n + 4\alpha_n + (n+1).$$

4. En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$4\gamma_n = (n+1)^4 - 6\beta_n - 4\alpha_n - (n+1).$$

5. Remplacer α_n et β_n par leurs expressions et montrer, en détaillant les calculs, que

$$4\gamma_n = n^2(n+1)^2.$$

6. En déduire finalement

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2}.$$

7. Vérifier la formule obtenue pour $n = 3$ par un calcul direct.

Correction

Réponse de l'exercice 1

On pose $f(x) = x - \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$. Alors

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Comme $1+x > 0$, f' est du signe de x . Ainsi f décroît sur $] -1, 0]$ puis croît sur $[0, +\infty[$. Son minimum est $f(0) = 0$. Donc

$$\boxed{\ln(1+x) \leq x}.$$

Réponse de l'exercice 2

1. Pour $m = 3$,

$$e^{2x} - 6e^x + 5 = 0.$$

En posant $X = e^x$, avec $X > 0$, on obtient

$$X^2 - 6X + 5 = (X-1)(X-5) = 0.$$

Ainsi $X = 1$ ou $X = 5$, d'où

$$\boxed{x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln 5}.$$

2. Avec $X = e^x > 0$, l'équation devient bien

$$\boxed{X^2 - 2mX + m + 2 = 0, \quad X > 0}.$$

3.

$$\Delta = 4m^2 - 4(m+2) = 4(m-2)(m+1).$$

Ainsi P_m possède deux racines réelles distinctes si $m < -1$ ou $m > 2$, une racine double si $m = -1$ ou $m = 2$, et aucune racine réelle si $-1 < m < 2$.

4. D'après les relations entre coefficients et racines,

$$\boxed{X_1 + X_2 = 2m, \quad X_1 X_2 = m + 2}.$$

5. Il faut conserver uniquement les racines strictement positives.

Si $m < -2$, le produit est négatif : une seule racine est positive, donc (E_m) possède une solution.

Si $m = -2$, les racines sont 0 et -4 : aucune n'est strictement positive, donc aucune solution.

Si $-2 < m < -1$, le produit est positif et la somme négative : les deux racines sont négatives, donc aucune solution.

Si $-1 < m < 2$, il n'y a aucune racine réelle, donc aucune solution.

Pour $m = -1$, la racine double vaut -1 , donc aucune solution.

Pour $m = 2$, la racine double vaut 2, donc une solution : $x = \ln 2$.

Enfin, si $m > 2$, le produit et la somme sont positifs : les deux racines sont positives, donc deux solutions.

Ainsi

m	nombre de solutions de (E_m)
$m < -2$	1
$-2 \leq m < 2$	0
$m = 2$	1
$m > 2$	2

Réponse de l'exercice 3

Posons

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3.$$

Initialisation. Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (3k^2 - 3k + 1) &= n^3 + 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= (n+1)^3. \end{aligned}$$

Conclusion. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + n \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{3n(n+1)}{2} + n \\ &= \boxed{n^3}. \end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 4

D'après la formule du binôme de Newton :

a)

$$\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 2^k 3^{6-k} = (2+3)^6 = \boxed{5^6}.$$

b)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k 1^{n-k} = \boxed{5^n}.$$

c) On retire le terme d'indice 0 :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k = 5^n - 1}.$$

d)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

On retire le terme d'indice n , égal à 3^{-n} :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k} = \left(\frac{4}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}}.$$

e) En utilisant $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} 2^k &= 2n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} 2^{k-1} \\ &= 2n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 2^j \\ &= \boxed{2n 3^{n-1}}. \end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 5

1. Par le binôme de Newton,

$$\boxed{f(x) = (1+x)^n}.$$

2. D'une part,

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}.$$

D'autre part,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

3. En prenant $x = 1$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}}.$$

4.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= n 2^{n-1} + 2^n \\ &= \boxed{(n+2) 2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 6

1. Par télescopage,

$$S_n = (n+1)^4.$$

2.

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

3. En sommant,

$$S_n = 4\gamma_n + 6\beta_n + 4\alpha_n + (n+1).$$

4. Comme $S_n = (n+1)^4$,

$$4\gamma_n = (n+1)^4 - 6\beta_n - 4\alpha_n - (n+1).$$

5. En remplaçant α_n et β_n ,

$$\begin{aligned}4\gamma_n &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\&= (n+1) [(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1] \\&= (n+1)(n^3 + n^2) \\&= \boxed{n^2(n+1)^2}.\end{aligned}$$

6. Ainsi

$$\boxed{\gamma_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}.$$

7. Pour $n = 3$,

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$$

et

$$\left(\frac{3 \times 4}{2}\right)^2 = 36.$$