

Automatisme de mathématiques – 1 heure

Exercice 1

Partie A

On considère la fonction polynomiale P définie par

$$P(x) = 2x^2 + x - 3.$$

1. Déterminer les racines de P .
2. Donner la forme factorisée de P .
3. Donner la forme canonique de P .
4. Dresser le tableau de signes de P .
5. Dresser le tableau de variations de P .

Partie B

On considère le polynôme

$$Q(x) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 + x + 6.$$

On admettra que -1 et 2 sont des racines de Q .

6. Déterminer un polynôme R du second degré tel que

$$Q(x) = (x + 1)(x - 2)R(x).$$

7. Factoriser complètement Q .
8. Résoudre l'inéquation

$$Q(x) \leq 0.$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=2}^4 (3k - 4).$

b) $\sum_{k=1}^3 (k - 2)^2.$

2. Réécrire chacune des sommes suivantes de façon que le nouvel indice commence à 0 :

a) $\sum_{k=3}^8 (2k + 1).$

b) $\sum_{k=2}^n (k^2 - 2k).$

3. On note

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n k, \quad \beta_n = \sum_{k=0}^n k^2, \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^n k^3.$$

Exprimer en fonction de α_n , β_n , γ_n et n les expressions suivantes :

a) $\sum_{k=0}^n (2k^2 - 3k + 4).$

b) $\sum_{k=0}^n k(k + 1)^2.$

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Simplifier les sommes suivantes :

a) $A_n = \sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4).$

b) $B_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k+1} \right).$

Exercice 4

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

On note

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n k, \quad \beta_n = \sum_{k=0}^n k^2.$$

On rappelle la formule trouvée en classe :

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

L'objectif de cet exercice est de trouver l'expression de β_n sous forme factorisée.

On considère la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3).$$

1. Premier calcul de S_n .

a) Développer $(k+1)^3 - k^3$ (on rappelle que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$).

b) En déduire l'expression de S_n en fonction de α_n , β_n et n .

2. Calculer S_n d'une seconde manière en remarquant qu'il s'agit d'une somme télescopique.

3. À l'aide des deux calculs précédents, montrer que

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

4. On considère le polynôme

$$P(X) = 2X^2 + 3X + 1.$$

a) Déterminer la forme factorisée de P .

b) En déduire une forme factorisée de

$$\sum_{k=0}^n k^2.$$

Correction.

Réponse de l'exercice 1

Partie A

On considère

$$P(x) = 2x^2 + x - 3.$$

1. On calcule le discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25.$$

Les racines de P sont donc

$$x_1 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{x_1 = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = 1.}$$

2. Comme le coefficient dominant de P est égal à 2, on obtient

$$P(x) = 2 \left(x + \frac{3}{2} \right) (x - 1).$$

Ainsi,

$$\boxed{P(x) = (2x + 3)(x - 1).}$$

3. On pose

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4}.$$

Puis

$$\beta = P\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \left(\frac{1}{16} \right) - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{25}{8}.$$

Ainsi, la forme canonique de P est

$$\boxed{P(x) = 2 \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{25}{8}.$$

4. Les racines de P sont $-\frac{3}{2}$ et 1, et son coefficient dominant est positif. On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0
	$+$	0	$-$	0
	$+$	0	$-$	0

5. Comme le coefficient dominant de P est positif,

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$P(x)$	$+\infty$	$-\frac{25}{8}$	$+\infty$

Partie B

On considère

$$Q(x) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 + x + 6.$$

6. On a

$$(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2.$$

On cherche un polynôme R de la forme

$$R(x) = ax^2 + bx + c.$$

Alors

$$Q(x) = (x^2 - x - 2)(ax^2 + bx + c).$$

En développant :

$$Q(x) = ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b-2a)x^2 + (-c-2b)x - 2c.$$

Par identification avec

$$Q(x) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 + x + 6,$$

on obtient

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -3.$$

Ainsi,

$$R(x) = 2x^2 + x - 3.$$

7. Comme $R = P$ d'après la partie A,

$$2x^2 + x - 3 = (2x+3)(x-1).$$

Ainsi,

$$Q(x) = (x+1)(x-2)(2x+3)(x-1).$$

Les quatre racines de Q sont donc

$$-\frac{3}{2}, \quad -1, \quad 1, \quad 2.$$

8. On range les racines dans l'ordre :

$$-\frac{3}{2} < -1 < 1 < 2.$$

Les quatre racines étant simples et le coefficient dominant de Q étant positif, le signe de Q alterne à chaque racine.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	2	$+\infty$			
$Q(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Par conséquent,

$$Q(x) \leq 0 \iff x \in \left[-\frac{3}{2}, -1\right] \cup [1, 2].$$

Réponse de l'exercice 2

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1. Calculer les sommes suivantes.

a)

$$\sum_{k=2}^4 (3k - 4) = (3 \times 2 - 4) + (3 \times 3 - 4) + (3 \times 4 - 4) = 15.$$

b)

$$\sum_{k=1}^3 (k - 2)^2 = (1 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (3 - 2)^2 = 2.$$

2. Réécrire chacune des sommes de façon que le nouvel indice commence à 0.

a) On pose

$$j = k - 3.$$

Lorsque $k = 3$, on a $\ell = 0$, et lorsque $k = 8$, on a $\ell = 5$.

De plus, $k = \ell + 3$.

Ainsi,

$$\sum_{k=3}^8 (2k + 1) = \sum_{\ell=0}^5 (2(\ell + 3) + 1) = \sum_{\ell=0}^5 (2\ell + 7).$$

b) On pose

$$j = k - 2.$$

Lorsque $k = 2$, on a $j = 0$, et lorsque $k = n$, on a $j = n - 2$.

De plus,

$$k = j + 2.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=2}^n (k^2 - 2k) = \sum_{j=0}^{n-2} ((j + 2)^2 - 2(j + 2)) = \sum_{j=0}^{n-2} (j^2 + 2j).$$

3. On note

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n k, \quad \beta_n = \sum_{k=0}^n k^2, \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^n k^3.$$

a)

$$\sum_{k=0}^n (2k^2 - 3k + 4) = 2 \sum_{k=0}^n k^2 - 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 4.$$

Or

$$\sum_{k=0}^n 4 = 4(n + 1).$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n (2k^2 - 3k + 4) = 2\beta_n - 3\alpha_n + 4(n + 1).$$

b) On développe :

$$k(k+1)^2 = k(k^2 + 2k + 1) = k^3 + 2k^2 + k.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n k(k+1)^2 = \sum_{k=0}^n k^3 + 2 \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k = \gamma_n + 2\beta_n + \alpha_n.$$

Réponse de l'exercice 3

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

a) Il s'agit d'une somme télescopique :

$$A_n = \sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 1.$$

b) On considère

$$B_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k+1} \right).$$

On simplifie d'abord l'expression à l'intérieur du logarithme :

$$1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

Ainsi,

$$B_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \ln(k) - \ln(k+1) = \ln(1) - \ln(n+1) = -\ln(n+1).$$

Réponse de l'exercice 4

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

On note

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n k, \quad \beta_n = \sum_{k=0}^n k^2.$$

On rappelle que

$$\alpha_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On considère

$$S_n = \sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3).$$

1. Premier calcul de S_n .

a) On développe :

$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

b) On en déduit :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1) = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 3\beta_n + 3\alpha_n + n + 1.$$

En utilisant

$$\alpha_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

on peut également écrire

$$S_n = 3\beta_n + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1.$$

2. Deuxième calcul de S_n , par télescopage :

$$S_n = (n+1)^3 - 0^3 = (n+1)^3.$$

3. En utilisant les deux expressions de S_n , on obtient

$$3\beta_n + 3\alpha_n + n + 1 = (n+1)^3.$$

Ainsi,

$$3\beta_n = (n+1)^3 - 3\alpha_n - n - 1 = 3\beta_n = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n - 1.$$

Donc

$$\beta_n = \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n - 1 \right) = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

4. On considère

$$P(X) = 2X^2 + 3X + 1.$$

a) On calcule le discriminant :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1.$$

Les racines sont

$$x_1 = \frac{-3-1}{4} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$P(X) = 2(X+1) \left(X + \frac{1}{2} \right) = (X+1)(2X+1).$$

b) On a

$$2n^3 + 3n^2 + n = n \underbrace{(2n^2 + 3n + 1)}_{P(n)} = n(n+1)(2n+1).$$

On en déduit

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$