

Programme de colle TS 1 // semaine 3 du 29/9 au 2/10

I Fonction circulaire : sinus, cosinus, tan

☞ Définition et valeurs particulières.

☞ Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$.
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

☞ Formules trigonométriques des angles associés : $\cos(-x)$, $\cos(\pi - x)$... en fonction de $\pm \sin(x) \pm \cos(x)$

☞ **Formules d'addition** : Soient a et b deux réels :

$$\begin{array}{ll} \square \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \square \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \\ \square \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & \\ \square \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) & \square \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} \\ \square \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) & \end{array}$$

☞ **Formules de factorisation** : Soient p et q deux réels :

$$\begin{array}{ll} \square \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & \square \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \square \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) & \square \sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{array}$$

☞ **Formules de duplication** : Soit a un réel :

$$\begin{array}{ll} \square \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a & \\ \square \sin(2a) = 2 \cos a \sin a & \square \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \end{array}$$

☞ **Premières formules de linéarisation** : Soit a un réel :

$$\text{☞ } \cos^2(a) = \frac{1}{2} (\cos(2a) + 1) \qquad \text{☞ } \sin^2(a) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2a))$$

☞ **Formule de phasage** : Soient a , b et ω trois réels, avec a et b non nuls simultanément. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{où } \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\rho} \\ \sin \varphi = -\frac{b}{\rho} \end{cases} . \text{ Donc } \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \end{cases} .$$

II Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques .

Soit a un nombre réel. Alors :

☞ L'équation $\cos x = \cos a$ aura pour solution les nombres réels :

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

☞ L'équation $\sin x = \sin a$ aura pour solution les nombres réels :

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

III Fonctions circulaires : cosinus et sinus

Premiers éléments d'études de fonctions faisant intervenir les fonctions cosinus et sinus.

IV Éléments de cours.

1. (Vidéo 1 et Vidéo 2) L'étudiant doit donner les 4 formules d'addition et savoir démontrer à partir de ces formules les formules ci-dessous (le colleur en choisit 2 ou 3 parmi les formules ci-dessous)

✗ les formules de factorisation :

$$\square \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\square \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

✗ la formule de duplication : Soit a un réel : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$

✗ Premières formules de linéarisation : Soit a un réel :

$$\square \cos^2(a) = \frac{1}{2} (\cos(2a) + 1)$$

$$\square \sin^2(a) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2a))$$

2. Exemple de "Phasage" : Savoir mettre sous la forme $f(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi)$ les expressions

$$\square f(t) = -\sqrt{3} \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$$

$$\square g(t) = 4 \cos\left(\frac{t}{2\pi}\right) - 3 \sin\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

3. Résolution de l'inéquation $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

4. Savoir compléter : pour tout nombre réel x , on a :

• $\cos(-x) = \dots\dots\dots$ (cos est pair)

• $\sin(-x) = \dots\dots\dots$ (sin est impair)

• $\cos(\pi - x) = \dots\dots\dots$

• $\sin(\pi - x) = \dots\dots\dots$

• $\cos(x + \pi) = \dots\dots\dots$

• $\sin(x + \pi) = \dots\dots\dots$

• $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots\dots\dots$

• $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots\dots\dots$

• $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

• $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

5. Savoir compléter :

✗ Formules d'addition : Soient a et b deux réels :

$$\square \cos(a + b) = \dots$$

$$\square \sin(a - b) = \dots$$

$$\square \sin(a + b) = \dots$$

$$\square \tan(a + b) = \dots$$

$$\square \cos(a - b) = \dots$$

$$\square \tan(a - b) = \dots$$

✗ Formules de factorisation : Soient p et q deux réels :

$$\square \cos(p) + \cos(q) = \dots$$

$$\square \sin(p) + \sin(q) = \dots$$

$$\square \cos(p) - \cos(q) = \dots$$

$$\square \sin(p) - \sin(q) = \dots$$

✗ Formules de duplication : Soit a un réel :

$$\square \cos(2a) = \dots = \dots = \dots$$

$$\square \sin(2a) = \dots$$

$$\square \tan(2a) = \dots$$

✗ Premières formules de linéarisation : Soit a un réel :

$$\Leftrightarrow \cos^2(a) = \dots$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(a) = \dots$$

6. Étudiez la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$