

Programme de colle TS 1 // semaine 4 du 5/10 au 8/10

Dans ce chapitre $\mathcal{P}$ sera un plan et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sera le plan vectoriel associé. Nous rappelons que $(\overrightarrow{\mathcal{P}}, +, \cdot)$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel au vu de sa structure (Nous verrons les détails de cette structure est les applications au cours du second semestre). $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé de $\mathcal{P}$.

On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ associée.

I Déterminant

☞ Définition $\det : \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \mapsto xy' - yx'$$

☞ Propriétés : Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

- ☐ $\det(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{v}, \vec{w})$ et $\det(\vec{w}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \det(\vec{w}, \vec{u}) + \mu \det(\vec{w}, \vec{v})$ (*bilinéaire*)
- ☐ $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$ (*antisymétrique*)
- ☐ $\det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ (*Alternée*)
- ☐ $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée

☞ Expression géométrique du déterminant : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Alors :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

Si l'un des deux est nul alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

☞ Soit ABC un triangle dans $\mathcal{P}$. Alors la surface $\mathcal{A}$ du triangle ABC est donné par :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$$

II Le produit scalaire

☞ Définition $\varphi : \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \mapsto xx' + yy'$$

Notation : $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

☞ Propriétés du produit scalaire : Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

- ☐ $(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{w} + \mu \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{w} \cdot (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \vec{w} \cdot \vec{u} + \mu \vec{w} \cdot \vec{v}$ (*bilinéaire*)
- ☐ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (*symétrique*)
- ☐ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux, dès lors si les deux vecteurs sont non nuls la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre.

☞ Définition géométrique du produit scalaire : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Si l'un des deux est nul alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Sinon :

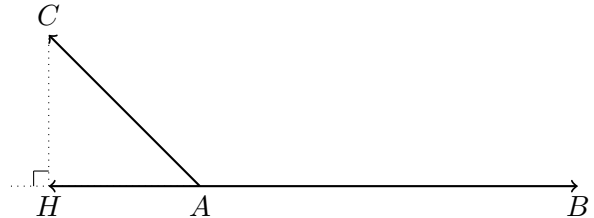
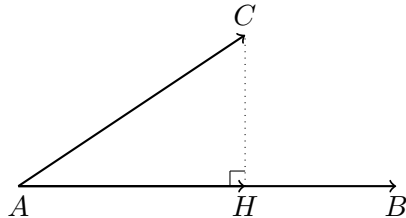
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Par ailleurs, on a $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$ où $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

III Applications aux configurations.

- ☞ Produit scalaire et projeté orthogonal : Soit A, B et C trois points de $\mathcal{P}$. Soit H de C sur la droite (AB). Dès lors le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AC}$ est donné par :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ de même signe.} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ de signe différent.} \end{cases}$$



- ☞ Soit une droite d passant par un point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors :

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{ax + by - ax_A - by_A}_{\text{équation cartésienne de } d} = 0$$

- ☞ Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R et de centre $A(x_A, y_A)$ alors une **équation cartésienne** de $\mathcal{C}$ est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

- ☞ Projection orthogonale et distance d'un point à une droite (Fait en classe lundi après-midi)
 ☞ Vidéo : Exemples d'ensembles de points (Fait en vidéo)



Méthode 1

Soit $A(1, 2)$ et $B(3, 4)$. Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant l'équation $MA = MB$.



Méthode 2

Soit $A(2, 1)$ et $B(0, 3)$. Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.



Méthode 3

Soit $A(2, 1)$ et $B(0, 3)$. Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant l'équation $MA^2 + MB^2 = 10$.



Méthode 4

Soit $A(2, 1)$, $B(0, 3)$ et $C(4, 3)$.

Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant l'équation $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

IV Géométrie repérée

☞ Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$ tel que dans ce repère, on ait $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. On a :

$$\text{☞ } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

$$\text{☞ Si } I \text{ milieu de } [AB], I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

☞ Représentation paramétrique d'une droite : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$. Soit d la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (c'est que $\vec{u}$ est un vecteur non nul de même direction que d). Alors :

$$M(x, y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

On obtient alors la **représentation paramétrique** de d :

$$d : \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

☞ Equation cartésienne d'une droite : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$. Soit Δ la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (c'est que $\vec{n}$ est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à celle de d). Alors :

$$M(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

On obtient alors la **représentation paramétrique** de d :

$$\Delta : ax + by - ax_A - by_A = 0$$

V Éléments de cours.

1. **Démonstration des propriétés :** Soient $\vec{u} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$, $\vec{v} \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)$ et $\vec{w} \left(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \right)$ trois vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Alors :

- $\det(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{v}, \vec{w})$ et $\det(\vec{w}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \det(\vec{w}, \vec{u}) + \mu \det(\vec{w}, \vec{v})$ (bilinéaire)
- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$ (antisymétrique)
- $\det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ (Alternée)
- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée (non redémontrée)

2. **Démonstration des propriétés** Soient $\vec{u} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$, $\vec{v} \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)$ et $\vec{w} \left(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \right)$ trois vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Alors :

- $(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{w} + \mu \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{w} \cdot (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \vec{w} \cdot \vec{u} + \mu \vec{w} \cdot \vec{v}$ (bilinéaire)
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrique)
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux, dès lors si les deux vecteurs sont non nuls la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre.

3. **Démonstration de :** Une droite d de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel. Donner en suivant un cas simple d'utilisation.

4. **Exemple du cours pour déterminer un projeté orthogonal :** Si $A(3, 4)$ et d la droite passant par $B(4, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminons les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur d . Puis déterminons la longueur AH . Cette longueur sera appelé la distance de A à d . **L'étudiant doit écrire les deux méthodes sur son cahier mais il choisira lui-même la méthode de résolution (il n'est pas obligé de connaître les eux) Autre vidéo**

5. Soient $\vec{u}$ un vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$ de base orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Alors :

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{j}$$

Application à : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe de $\vec{\mathcal{P}}$. Soit $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée directe obtenue par une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. C'est-à-dire que :

$$\vec{u} : \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{v} : \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

- (a) Utiliser la formule ci-dessus (c.a.d $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{j}$) pour déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $\mathcal{B}'$.
- (b) Soit $\vec{n} : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{n}$ dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$.
- (c) Refaire de même avec $\vec{n} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.