

Programme de colle TS 1 // semaine 5 du 12/10 et 16/10

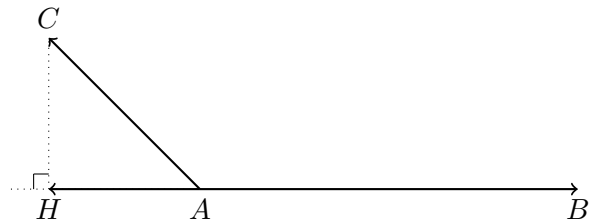
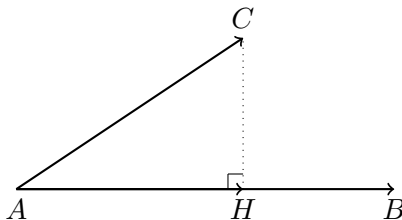
I Déterminant

II Le produit scalaire

III Applications aux configurations.

- ☞ Produit scalaire et projeté orthogonal : Soit A, B et C trois points de $\mathcal{P}$. Soit H de C sur la droite (AB). Dès lors le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AC}$ est donné par :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ de même signe.} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ de signe différent.} \end{cases}$$



- ☞ Soit une droite d passant par un point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors :

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{ax + by - ax_A - by_A}_{\text{équation cartésienne de } d} = 0$$

- ☞ Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R et de centre $A(x_A, y_A)$ alors une **équation cartésienne** de $\mathcal{C}$ est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

- ☞ Projection orthogonale et distance d'un point à une droite.

- ☞ Vidéo : Exemples d'ensembles de points (Fait en vidéo)



Méthode 1

Soit $A(1, 2)$ et $B(3, 4)$. Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant l'équation $MA = MB$.



Méthode 2

Soit $A(2, 1)$ et $B(0, 3)$. Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.



Méthode 3

Soit $A(2, 1)$ et $B(0, 3)$. Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant l'équation $MA^2 + MB^2 = 10$.

**Méthode 4**

Soit $A(2, 1)$, $B(0, 3)$ et $C(4, 3)$.

Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant l'équation

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) = 0$$

IV Nombres complexes : forme algébrique

☞ Définition

☞ Linéarité de la partie réel et de la partie imaginaire : Soit z et z' deux nombres complexes et λ, μ deux réels alors :

$$\square \operatorname{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Re}(z) + \mu \operatorname{Re}(z')$$

$$\square \operatorname{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Im}(z) + \mu \operatorname{Im}(z')$$

☞ Propriétés algébriques du module : Pour tous nombres complexes z et z' avec $z \neq 0$ et n un entier, on a les propriétés suivantes :

$$|zz'| = |z| \times |z'| \quad |z^n| = |z|^n \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} \quad |z|^2 = z\bar{z}$$

☞ Premières approches géométriques (points et vecteurs) : Soient A et B les points du plan d'affixe respectives z_A et z_B . Alors le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est d'affixe $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$.

☞ Propriétés algébriques de la conjugaison : Soient z et z' deux nombres complexes alors :

$$\square \overline{\overline{z}} = z \text{ (involutif)}$$

$$\square \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\square \overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\square \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

☞ Conjugaison et partie réel et imaginaire :

$$\square z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$\square z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

$$\square z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

$$\square z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

☞ Soit z un nombre complexe, alors : $z \times \bar{z} = |z|^2$ et $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \times \bar{z}}$

☞ Formule du binôme de Newton

☞ Résolution d'équation du première ordre (avec z ou avec z et $\bar{z}$)

V Nombres complexes : Forme trigonométrique

Définition : coordonnée polaire et formes trigonométriques de l'affixe d'un point.

Soit $z = a + ib$ un complexe. Pour trouver sa forme trigonométrique et les coordonnées polaires du point d'affixe z , il suffit de :

1. Calculer son module : $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. Puis calculer de déterminer son argument θ avec les relations

$$\begin{cases} \cos(\theta) = a/r \\ \sin(\theta) = b/r \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a > 0 \\ \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

puis en déduire une valeur de θ

3. Finalement, $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

☞ Pour tous nombres complexes z et z' avec $z \neq 0$, k un réel strictement positif et n un entier naturel, on a les propriétés suivantes :

$$\operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z') [2\pi] \quad \operatorname{Arg}(z^n) = n \times \operatorname{Arg}(z) [2\pi]$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z) \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right) = \operatorname{Arg}(z') - \operatorname{Arg}(z) [2\pi]$$

$$\operatorname{Arg}(kz) = \operatorname{Arg}(z) [2\pi] \quad \operatorname{Arg}(-kz) = \operatorname{Arg}(z) + \pi [2\pi]$$

VI Étude de $\mathbb{U}$ et forme exponentielle

☞ On appelle $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

☞ **Formes exponentielles** : Soit $z \in \mathbb{U}$ et $\theta = \operatorname{Arg}(z)$. Alors $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. On note $\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$. Plus généralement, si z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ . Alors $z = re^{i\theta}$ sera appelée la **forme exponentielle** du complexe z .

☞ Pour tous nombres complexes z et z' de l'ensemble $\mathbb{U}$ et n un entier naturel, les nombres zz' , z^n et $\frac{z'}{z}$ sont aussi dans $\mathbb{U}$. On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit et par passage à l'inverse.

☞ On considère deux complexes $z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$ de $\mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On alors :

$$\square \bar{z} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \square \frac{zz'}{e^{i(\theta+\theta')}} = \frac{e^{i\theta}e^{i\theta'}}{e^{i(\theta+\theta')}} = \square \frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \bar{z} \quad \square z^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

VII Premières application à la trigonométrie

☞ Formule d'Euler : Soit θ un réel. Alors $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

☞ Formule de Moivre : Pour tout θ réel et tout n entier naturel, $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

☞ Application à la trigonométrie

□ Linéarisation

□ Anti-linéarisation

□ Formules de trigonométrie.

VIII Éléments de « cours ».

1. **Démonstration des propriétés :** Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :
 - $\det(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{v}, \vec{w})$ et $\det(\vec{w}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \det(\vec{w}, \vec{u}) + \mu \det(\vec{w}, \vec{v})$ (*bilinéaire*)
 - $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$ (*antisymétrique*)
 - $\det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ (*Alternée*)
 - $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée (non redémontrée)

2. **Proposition et démonstration :** Si G est le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$, alors pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \left(\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} \right)$$

Puis application pour déterminer les coordonnées d'un barycentre et le construire avec des calculs simples. (Dans le cas général pour ceux qui veulent)

3. **Démonstration des propriétés algébriques du module :**

$$|zz'| = |z| \times |z'| \quad |z^n| = |z|^n \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}$$

4. On se place dans le plan complexe. A tous point M d'affixe $z = x + iy$ différent de i on associe $Z = \frac{z}{z-i}$.
 - (a) Montrer que $Z = \frac{x^2+y^2-y+ix}{x^2+(y-1)^2}$.
 - (b) En déduire $\operatorname{Re}(Z)$?
 - (c) Déterminer alors l'ensemble des points M tels que Z soit un imaginaire pur.
5. **Démonstration des propriétés de l'argument :** Pour tous nombres complexes z et z' avec $z \neq 0$, k un réel strictement positif et n un entier naturel, on a les propriétés suivantes :

$$\operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z') [2\pi] \quad \operatorname{Arg}(z^n) = n \times \operatorname{Arg}(z) [2\pi]$$

6. Exemple de linéarisation : linéarisation de $\sin^3(\theta)$.