Programme de colle TS 1 // semaine 6 du 3/11 et 7/11

L'ensemble des notions sur les nombres complexes vues la semaine 5

I Applications à la géométrie

☞ On considère $\overrightarrow{u}(z_u)$ et $\overrightarrow{v}(z_v)$ deux vecteurs du plan vectoriel, alors :

❒ $||\overrightarrow{u}|| = |z_u|$

❒ $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) = \text{Arg}(z_u)$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_v}{z_u}\right)$

☞ On considère les points A, B, C et D du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

❒ $|z_A| = OA$ et $\text{Arg}(z_A) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA})$.

❒ $|z_B - z_A| = AB$ et $\text{Arg}(z_B - z_A) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB})$.

❒ $\text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

☞ **Méthodes :** Pour montrer qu'un triangle ABC est :

☞ est rectangle en A, on doit obtenir : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$

☞ est isocèle en A, on doit obtenir : $\left|\dfrac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$

☞ est équilatéral, on doit obtenir : $\dfrac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

☞ **Ensembles de points :** Soit a un nombre complexe et k un réel positif.

❒ L'ensemble des points M d'affixes z tels que $|z - a| = k$ est l'ensemble des points du cercle de centre Ω d'affixe a et de rayon k.

❒ L'ensemble des points M d'affixes z tels que $Arg(z - a) = k$ est la demi-droite issue du point A d'affixe a et faisant un angle de k avec l'axe des abscisses.

II Résolution d'équations

☞ Solution de $z^n = a$ avec $a \in \mathbb{C}$

☞ Soit n un entier naturel. On appelle racine n-ième de l'unité une solution complexe de l'équation $z^n = 1$. On note l'ensemble des ces nombres $\mathbb{U}_n = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

☞ Les racines n-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets du polygone régulier à n sommets inscrits dans le cercle de O et de rayon 1 et dont l'un des sommet est le point d'affixe 1.

III Éléments de « cours ».

1. Linéarisation de $\sin^4(\theta)$. Antilinéarisation de $\sin(4\theta)$ ou $\cos(4\theta)$ à choisir par le colleur.
2. Démonstration de : Soit P une fonction polynômiale non nulle. S'il existe a tel que $P(a) = 0$ alors il existe Q une fonction polynômiale tel que $P(z) = (z-a)Q(z)$.
3. L'exercice : On considère les points A, B d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = 5-i$.
   (a) Déterminer l'affixe z_C du point C pour que ABC soit un triangle équilatéral direct (c'est-à-dire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$)
   (b) Déterminer l'affixe z_D du point D pour que ABD soit un triangle rectangle isocèle en A direct (c'est-à-dire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) > 0$)
4. L'exemple : Décrire les ensembles $E_1 = \{M(z)||z+1-2i| = 2\}$, $E_2 = \left\{M(z)|Arg(z+2i) = \dfrac{\pi}{4}\right\}$ et $E_3 = \{M(z)|\ \ |z+2i| = |z-2|\}$
5. Résolution des équations : $z^5 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z^2 - (i+1)z + 2(i-1) = 0$
6. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.