Programme de colle TS 1 // semaine 7 du 10/11 AU 13/11

Attention : très peu d'exercices on était fait sur ce chapitre et les applications (équations et représentations de droites et de plans ne seront fait que la semaine prochaine.

Notation : Dans ce chapitre $\mathscr{E}$ sera l'espace et $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ sera l'espace vectoriel associé. Enfin $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé directe de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

I Programme de la semaine dernière sur les nombres complexes.

Il a notamment était calculé et simplifié des sommes pour l'utilisation des nombres complexes.

II Bases et repère

☞ Définition d'une famille libre que nous révérons ultérieurement. $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n})$ est libre ssi :

$$\forall (\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e_i} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

☞ Famille libre dans $\overrightarrow{\mathscr{E}}$: Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$

- ❒ la famille $(\vec{u})$ est libre, ssi $\vec{u}$ est non nul.
- ❒ la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
- ❒ la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre ssi $\lambda\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \beta = \gamma = 0$ où $(\lambda, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

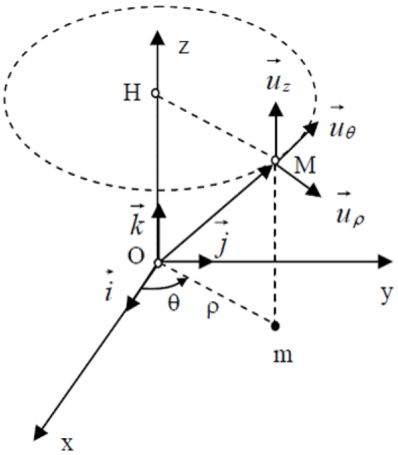
☞ Familles liées. Une famille est liée si elle n'est pas libre :

- ❒ la famille $(\vec{u})$ est liée, ssi $\vec{u} = \overrightarrow{0}$.
- ❒ la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- ❒ la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée ssi l'un de ses trois vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres ssi ses trois vecteurs sont coplanaires.

☞ Coordonnées cylindriques :

Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathscr{E}$ avec ses coordonnées dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}$. On appelle coordonnées cylindrique du point M un triplet (ρ, φ, z) de nombres réels avec $\rho \geqslant 0$ tels que :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$$

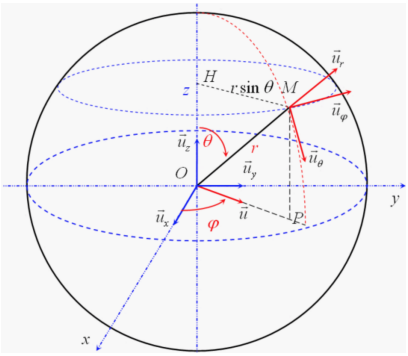


Si on note $H(x, y, 0)$ le projeté orthogonal de M sur le plan de base (Oxy) alors φ est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OH})$ (donc $\varphi \in]-\pi, \pi]$). Dés lors, si l'on note $\overrightarrow{u_r} = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}$, on a $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_r} + z\vec{k}$

Il faut savoir passer des coordonnées cartésiennes aux cylindriques et inversement.

☞ Coordonnées sphérique :
Soit $M(x,y,z)$ un point de $\mathscr{E}$ avec ses coordonnées dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}$. On appelle coordonnées sphérique du point M un triplet (r,φ,θ) de nombres réels avec $r \geqslant 0$ tels que :

$$r = \sqrt{x^2+y^2=z^2} = OM \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$



On a $\theta = \widehat{KOM} \in [0,\pi]$ l'angle géométrique. (où K est le point tel que $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{k}$)
Si $H(x,y,0)$ le projeté orthogonal de M sur le plan de base (Oxy) alors $\varphi = (\overrightarrow{i},\overrightarrow{OH})$ est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{OH})$ dans le plan vectoriel vect$(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ (donc $\varphi \in]-\pi,\pi]$).
Dés lors, si l'on note $\overrightarrow{u_r} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\overrightarrow{j} + \cos(\theta)\overrightarrow{k}$, on a $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$
Il faut savoir passer des coordonnées cartésiennes aux sphériques et inversement.

III Barycentre dans l'espace : idem que dans le plan.

IV Applications multilinéaires de l'espace : produit scalaire (forme bilinéaire), produit vectoriel (application bilinéaire), et déterminant ou produit mixte (forme trilinéaire) .

A Le produit scalaire : forme bilinéaire symétrique.

☞ Définition géométrique : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. Alors :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|\cdot\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$$

Si l'un des deux est nul alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$. Sinon :

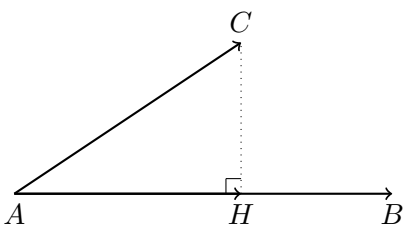
$$\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|}$$

Par ailleurs, on a $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$

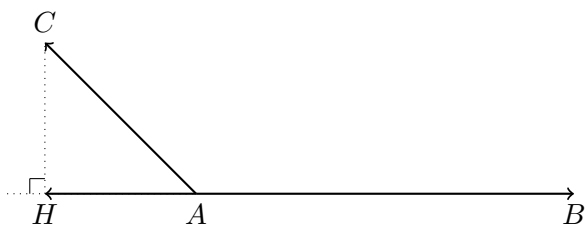
☞ Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB}\times\overline{AH} = \begin{cases} AB\times AH & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AH} \text{ de même signe.} \\ -AB\times AH & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AH} \text{ de signe différent.} \end{cases}$$

si $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ de même signe.



si $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ de signe différent.



☞ Produit scalaire a les mêmes propriétés que dans le plan :
- ❒ bilinéaire : $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\in\overrightarrow{\mathscr{E}}^3,\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=\lambda\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\mu\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$ (idem à droite)
- ❒ symétrique : $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\overrightarrow{\mathscr{E}}^2,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
- ❒ définie : $\forall\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathscr{E}}\ ,\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=||\overrightarrow{u}||^2=0\Rightarrow\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.
- ❒ positive : $\forall\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathscr{E}}\ ,\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}\geqslant 0$.

☞ Expression analytique si $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=xx'+yy'+zz'$$

B Produit vectoriel

☞ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ et on note $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ le vecteur défini par :
- ❒ $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ ssi $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires,
- ❒ $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{k}$, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, avec $\overrightarrow{k}$ est orthogonal avec le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{k})$ est direct.

☞ Propriété géométrique : $\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|$ représente l'aire de parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

☞ Propriétés algébriques :
- ❒ bilinéaire : $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\in\overrightarrow{\mathscr{E}}^3,\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w}=\lambda\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}+\mu\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}$ (idem à droite)
- ❒ antisymétrique : $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\overrightarrow{\mathscr{E}}^2,\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}$

☞ Expression analytique : $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}y&y'\\z&z'\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}x&x'\\z&z'\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}x&x'\\y&y'\end{vmatrix}\end{pmatrix}$

C Produit mixte ou déterminant

☞ Définition $((\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w})$

☞ Propriétés algébriques : antisymétrie et trilinéarité

☞ Expression analytique dans une base orthonormée directe.

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\begin{vmatrix}x&x'&x''\\y&y'&y''\\z&z'&z''\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}y'&y''\\z'&z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x'&x''\\z'&z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x'&x''\\y'&y''\end{vmatrix}$$

☞ Règles de calculs :
- ❒ Si l'un au moins des trois vecteurs du produit mixte est le vecteur nul, alors le produit mixte est nul.
- ❒ Le produit mixte est changé en son opposé si on échange deux vecteurs (on dit que le produit mixte est antisymétrique).
- ❒ Si deux vecteurs au moins sont égaux dans le produit mixte, alors le produit mixte est nul (on dit le produit mixte est alterné). Plus généralement : si un des vecteurs est combinaison linéaires des deux autres, le produit mixte est nul.

☞ On ne change pas le produit mixte en additionnant à un vecteur une combinaison linéaire des deux autres.

☞ Pour montrer qu'une famille de trois vecteurs est liée (ou que trois vecteurs sont coplanaires) :

$$\text{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \text{ La famille } (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \text{ est liée}$$

☞ Ou dans une base orthonormée : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0.$

☞ Propriété géométrique : Soient A, B, C et C quatre points de l'espace, alors

$$\text{le volume du tétraèdre} ABCD = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$$

☞ Reconnaitre une base (famille libre et génératrice) avec le déterminant :

- ❒ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace ssi $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$.
- ❒ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base directe de l'espace ssi $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] > 0$.
- ❒ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base indirecte de l'espace ssi $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] < 0$.

V Éléments de « cours ».

1. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe. Démontrer les résultats :

   ❒ $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}]$ ❒ $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ ❒ $[\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = -[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

   ❒ $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} x'' - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} y'' + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} z'' = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - x''y'z - y''z'x - z''x'y$

2. Vidéo démonstration de :
   (a) Si l'un au moins des trois vecteurs du produit mixte est le vecteur nul, alors le produit mixte est nul.
   (b) Le produit mixte est changé en son opposé si on échange deux vecteurs (on dit que le produit mixte est antisymétrique).
   (c) Si deux vecteurs au moins sont égaux dans le produit mixte, alors le produit mixte est nul (on dit le produit mixte est alterné). Plus généralement : si un des vecteurs est combinaison linéaires des deux autres, le produit mixte est nul.
   (d) On ne change pas le produit mixte en additionnant à un vecteur une combinaison linéaire des deux autres.

   Exercice : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Exprimer tous les résultats ci-dessous en fonction de $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$:

   - $[2\vec{u}-\vec{v},\vec{v},\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}]$
   - $[3\vec{u}+\vec{v}-\vec{w},-\vec{u}+\vec{v}-\vec{w},\vec{u}-\vec{w}]$
   - $[\vec{u}+\vec{v}+\vec{w},-\vec{u}-\vec{v}-\vec{w},2\vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w}]$

3. Calculez le déterminant $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ de trois façons : Par développement par rapport à la deuxième colonne, par la règle de *Sarrus*, enfin en appliquant : $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3$.

4. Exercice : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{E}$. On pose $\vec{e_1} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$

(a) Déterminer deux vecteurs $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ tel que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ forme une base orthonormée directe de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

(b) Calculer $[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}]$.

5. Soit le même exercice soit très similaire. On considère une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ On considère $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ trois vecteurs ainsi que leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$

(a) Justifier que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

(b) On a $\overrightarrow{m}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{m}$ dans la base $\mathcal{B}$.

(c) On a $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

(d) Soit $\overrightarrow{r}$ un vecteur de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$ et $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

i. Déterminer x, y et z en fonction de X, Y et Z.

ii. Déterminer X, Y et Z en fonction de x, y et z .

6. Soit $ABCD$ un tétraèdre non plat de l'espace $\mathscr{E}$. Soient E, F et G trois points définis par les relations vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CD}.$$

(a) Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

(b) Déterminer les coordonnées de E, F et G comme barycentres des points A, B, C et D avec des coefficients à préciser.

(c) Peut-on écrire E comme barycentre de F et G ? Si oui, déterminer les coefficients associés.