Programme de colle TS 1 // semaine 8 du 16/11 au 20/11

Notation : Dans ce chapitre $\mathscr{E}$ sera l'espace et $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ sera l'espace vectoriel associé. Enfin $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormé directe de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

I Bases et repère

Voir programme précédent.

II Les deux formes bilinéaires de l'espace : produit scalaire, produit vectoriel et déterminant.

Voir programme précédent.

III Applications

A Plans de l'espace

☞ Caractérisation d'un plan de l'espace

❒ Par trois points non alignés A, B et C, ainsi $\mathcal{P} = (ABC)$.

✣ On obtient une équation cartésienne avec le déterminant :

$$M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow \text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z - z_A & z_B - z_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

✣ On obtient une représentation paramétrique :

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (ABC) &\Leftrightarrow \exists (t,t') \in \mathbb{R}^2 \ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \exists (t,t') \in \mathbb{R}^2 \ \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

❒ Par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on dit alors que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$ où qu'ils dirigent $\mathcal{P}$. Même technique pour déterminer une équation cartésienne : $\text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$. Ou une représentation paramétrique.

❒ Par un point A et un vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, c'est à dire un vecteur non nul orthogonal à $\mathcal{P}$. On obtient une équation avec le produit scalaire :

$$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

☞ Savoir *passer* d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique : on "passe" deux coordonnées en paramètres.

☞ Savoir *passer* d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne , on peut envisager deux méthodes :

- ❒ On résout le système paramétrique en éliminant les deux paramètres.
- ❒ On détermine un point ainsi qu'un vecteur normal en prenant par exemple le produit vectoriel de deux vecteurs qui dirigent $\mathscr{P}$.

☞ Savoir déterminer la projeté d'un point A sur un plan $\mathscr{P}$ ainsi que sa distance :

1. L'on détermine la représentation paramétrique de la droite passant par A et orthogonal à $\mathscr{P}$
2. On détermine le projeté orthogonal comme l'intersection de cette droite avec $\mathscr{P}$.

B Droites de l'espace

☞ Caractérisation d'une droite de l'espace :

- ❒ Par deux points distincts A et B. On obtient alors facilement une représentation paramétrique :

$$M(x,y,z) \in (AB) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

- ❒ Par un point A un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Idem ci-dessus pour une représentation paramétrique.
- ❒ Comme l'intersection de deux plans sécants. Dés lors le système formé de deux équations cartésiennes de chacun des plans, sera appelé une système d'équations cartésiennes de la droite.

☞ Projeté orthogonal sur une droite. Soit A un point de l'espace et d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, alors le projeté orthogonal de A sur d est le points vérifiant les deux condition :

- ❒ $H \in d$
- ❒ $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$

On définie alors la distance de A à la droite d par : $\text{dist}(A,d) = AH$ (attention aucune formule n'est au programme)

☞ Savoir *passer* d'un système d'équations cartésiennes à une représentation paramétrique, on peut envisager deux méthodes :

- ❒ On choisit judicieusement une des coordonnées comme paramètre et on exprime est deux autres en fonction de ce paramètre.
- ❒ On commence par déterminer un point ainsi qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ à l'aide du produit vectoriel (valable seulement en repère orthonormé direct).

☞ Savoir *passer* d'une représentation paramétrique à un système d'équation cartésienne, on déterminer un point A de $\mathcal{D}$ et deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ non colinéaires orthogonaux au vecteur directeur de $\mathcal{D}$ puis on détermine les équations cartésiennes des deux plans passant par A et de vecteur normal respectivement $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

C Positions relatives, intersection, parallélisme, orthogonalité

☞ Deux droites sont :

- ❒ coplanaires et alors elles sont :
  - ✢ sécantes
  - ✢ ou parallèles
- ❒ où non coplanaires (ni sécantes, ni parallèle)

☞ Une droite et un plan sont :

- ✢ sécants
- ✢ ou parallèles

☞ Entre deux plans :

- ✢ sécants et l'intersections est une droite.
- ✢ ou parallèles

☞ Trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ de vecteur normal respectivement $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$,

- ❒ Si ces trois vecteurs sont non coplanaire (c.a.d forment une famille libre) alors l'intersection est un point.
- ❒ Si ces trois vecteurs sont coplanaires :
  - ✢ l'intersection est vide
  - ✢ ou une droite
  - ✢ ou les droite plans sont confondus.

D Sphères dans l'espace

☞ Caractérisation d'une sphère dans l'espace

- ❒ Son centre et son rayon.
- ❒ Un diamètre de la sphère.

☞ Équation cartésienne d'une sphère de centre A et de rayon R :

$$(x - x - A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$$

☞ Intersection entre un plan $\mathcal{P}$ et une sphère de centre A et de rayon R (On notera H le projeté de A sur $\mathcal{P}$) :

- ❒ vide si $R < \text{dist}(A, \mathcal{P})$
- ❒ un point si $R = \text{dist}(A, \mathcal{P})$ (c'est H)
- ❒ un cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - \text{dist}(A, \mathcal{P})^2}$ si $R > \text{dist}(A, \mathcal{P})$

IV Éléments de « cours ».

1. Exercice : Soit $A(0,1,-3)$ et $B(-1,0,2)$ deux points de l'espace $\mathscr{E}$. Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$
   (a) Déterminer une équation cartésienne puis une représentation paramétrique et du plan $\mathscr{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$ de représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = \mu + 1 \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \mu - 3 \end{cases} \qquad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D} = \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$.
2. Dans un repère orthonormé direct, on donne $\vec{u}(1,0,-1)$, $A(-1,2,1)$, $B(1,4,3)$ et $M(0,3,-1)$.
   (a) Vidéo : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$ la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ puis calculer $d(M,\mathcal{D})$.
   (b) On définie maintenant $\mathscr{R}$ comme étant le plan passant par M et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de B sur le plan $\mathscr{R}$.
   (c) Déterminer la nature du triangle ABM.
3. Exercice : On donne $\mathscr{S} : x^2+y^2+z^2-2x+2y-7=0$ et $\mathscr{P} : x+2y-z-2=0$. Étudier la nature de $\mathscr{S} \cap \mathscr{P}$ puis déterminer $\mathscr{S} \cap \mathscr{P}$
4. Exercice :
   ❒ Soient D_1 la droite passant par $A(3,2,4)$ et de vecteur directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.
   ❒ Soient D_2 la droite passant par $B(2,0,1)$ et de vecteur directeurs $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite D_2.
   (b) Déterminer les coordonnées de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ puis de $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{w}$.
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Vous justifierez que $D_1 \subset \mathscr{P}$.
   (d) Déterminer l'intersection $D_2 \cap \mathscr{P}$. On notera C ce point.
   (e) Justifier que la droite D_3 passant par C et de vecteur directeur $\vec{w}$ est perpendiculaires à D_1 et D_2.
5. Soit le même exercice soit très similaire. On considère une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$ On considère $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ trois vecteurs ainsi que leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$
   (a) Justifier que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\vec{\mathscr{E}}$.
   (b) On a $\vec{m}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $\vec{m}$ dans la base $\mathcal{B}$.

(c) On a $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

(d) Soit $\overrightarrow{r}$ un vecteur de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

i. Déterminer x, y et z en fonction de X, Y et Z.

ii. Déterminer X, Y et Z en fonction de x, y et z .