TD M3 : Mouvement et énergie

Ex 1 : conversion d'énergie

Une batterie de vélo annonce une capacité de 500 Wh.On considère un ensemble cycliste + équipement de masse 100kg.

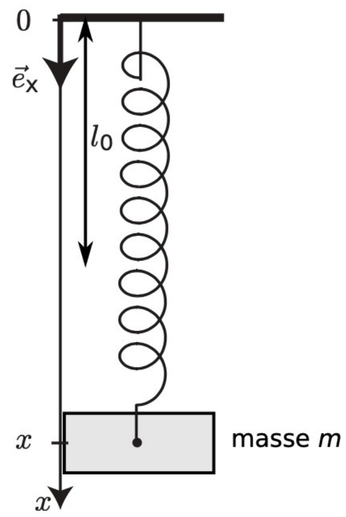
De quelle altitude maximale ceci permet-il de s'élever sans effort de la part du cycliste ?

Ex2 : position d'équilibre du pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m attachée au bout d'une tige rigide sans masse de longueur ℓ. L'accélération de pesanteur est verticale descendante $\vec{g} = g\,\vec{u_x}$.

1. Effectuer un bilan des forces et en déduire l'expression de l'E_p du point M en fonction de m, g, ℓ et θ.
2. Tracer l'allure de l'énergie potentielle puis déterminer les positions d'équilibre θ_n et étudier leur stabilité.
3. Pour une vitesse initiale v_0 et une angle initial θ_0 donnée, déterminer l'expression de l'énergie mécanique E_m. En déduire, lorsqu'il existe, la valeur de l'angle maximal $\theta_{\max}$ des oscillations.

Ex3 : position d'équilibre pour le système masse-ressort



On considère une masse m attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Le tout est vertical. On négligera tout frottement.
On prendra $k = 40\,\mathrm{N/m}$, $m = 100\,\mathrm{g}$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

1) Donner l'expression de l'énergie potentielle totale du système, en fonction de x notamment.
2) Déterminer l'expression de la position d'équilibre $x_{éq}$. Est-elle stable ou instable ?
3) Tracer grossièrement l'allure de Ep(x).
4) Donner l'expression de l'énergie mécanique totale Em du système en fonction de x et $\dot{x}$
5) Utiliser Em pour déterminer l'équation du mouvement.
6) Résoudre l'équation du mouvement en considérant qu'à l'instant initial la masse est en $x = x_{éq} + \delta$ et qu'on lâche la masse de cette position sans vitesse initiale.

Ex4 : balle rebondissante

Cet exercice s'intéresse au mouvement d'une balle rebondissante lâchée depuis une certaine hauteur initiale h_0.
On considère une balle rebondissante de masse m, lâchée sans vitesse initiale depuis une hauteur h_0. On néglige tout frottement. On note $\vec{g}$ le champ de pesanteur uniforme.
On lâche la balle à t = 0, et on note t_0 l'instant du premier impact avec le sol, et v_0 la vitesse juste avant l'impact.

On choisit un axe z vertical dirigé vers le haut et dont l'origine est située au niveau du sol.

1) En étudiant la première phase du mouvement, où la balle est en chute libre vers le sol, montrer que l'instant de l'impact est $t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

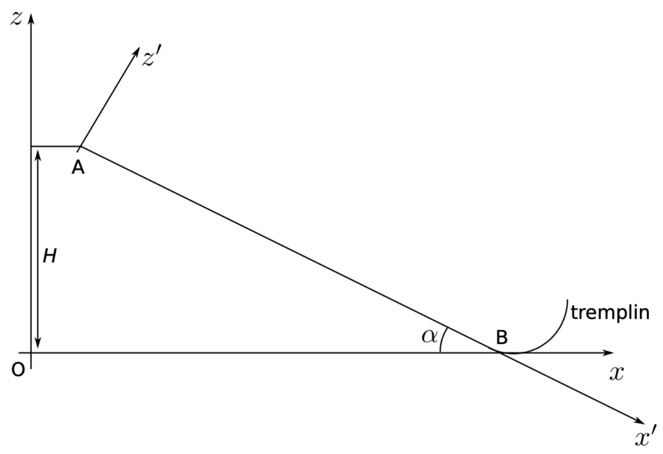
Une fois au sol, la balle rebondit. Le rebond n'étant pas parfaitement élastique, la balle perd une partie de son énergie cinétique. Notons E_{cn} l'énergie cinétique juste avant l'impact numéro n et E_{cn}' celle juste après cet impact. Ces deux énergies ne sont pas égales, car une partie de l'énergie est perdue lors du rebond.

On a donc : $E'_{cn} = \alpha E_{cn}$ avec $\alpha < 1$ le coefficient de restitution.

2) Montrer par un raisonnement énergétique que pour le tout premier impact (n = 0), $Ec_0 = mgh_0$, puis que la hauteur maximale atteinte par la balle après ce premier rebond est $h_1 = \alpha h_0$
3) En déduire l'expression de la hauteur maximale h_n atteinte après l'impact numéro n en fonction de h_0 et de n.

Ex 5 : Skieur

On considère un skieur qui se lance, sans vitesse initiale au point A, dans une piste d'inclinaison moyenne $\alpha = 30°$ pour un dénivelé total de $H = 10\,\text{m}$. La masse du skieur et de ses équipements est de $100\,\text{kg}$.



On modélise les frottements entre la neige et les skis par la loi de Coulomb pour les frottements : la résultante des actions de la neige sur le skieur s'écrit $\vec{N} + \vec{T}$, avec $\vec{N}$ la composante normale à la piste et $\vec{T}$ la composante tangentielle (correspondant à des frottements), avec $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ et $f = 0{,}15$ le coefficient de frottement ski-neige.

1 - Le mouvement est-il conservatif ?

2 - Montrer que $\vec{T} = -fmg\cos\alpha\,\vec{e}_{x'}$.

3 - En appliquant un théorème énergétique, donner l'expression de l'énergie cinétique du skieur lorsqu'il arrive au bas de la pente (point B). En déduire la valeur de sa vitesse en B.

4 - Le skieur arrive ensuite sur un tremplin et décolle. On néglige les frottements de l'air. Quelle est l'altitude maximale qu'il va pouvoir atteindre? Dans le cas de l'altitude maximale, tracer sa trajectoire.

Ex 6 : piégeage d'un électron

Considérons le mouvement selon un axe (Oz) d'un électron de masse $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$ et de charge $-e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$ dans un dispositif de piégeage. Son énergie potentielle y vaut

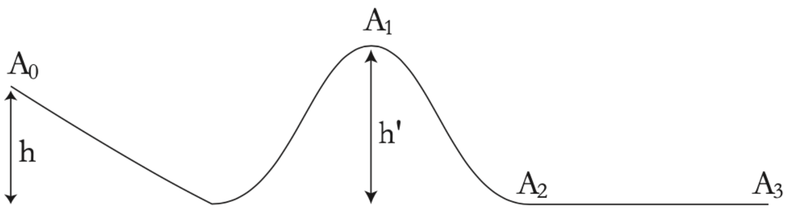
$$E_{\text{p}}(z) = \frac{e\,V_0}{2\,d^2} z^2$$

où $V_0 = 5{,}0\,\text{V}$ et $d = 6{,}0\,\text{mm}$.

1) Justifier que l'électron est dans une position d'équilibre stable.
2) En négligeant tout phénomène dissipatif, c'est à dire en supposant que l'énergie mécanique est conservée, calculer la fréquence des oscillations de l'électron dans le piège.

Ex7 Bilans énergétiques divers et variés

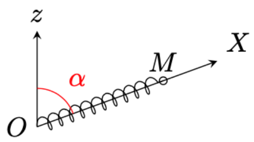
Une particule M de masse m est déposée sur un plan incliné au point A_0 d'altitude h (voir figure).



1. La particule parvient-elle au point A_1 d'altitude $h' > h$ en supposant qu'elle glisse sans frottement ?

2. La particule est maintenant mise en contact (mais sans lien physique) avec un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos l_0. Le ressort est comprimé jusqu'à une longueur l puis bloqué, la particule est alors en A_0. On libère le ressort. Le trajet $A_0A_1A_2$ est parfaitement glissant.
   (a) Déterminez la longueur l du ressort pour que la particule atteigne A_1 avec une vitesse nulle.
   (b) Déterminez la vitesse de cette particule en A_2.
   (c) Déterminez la distance d'arrêt $L = A_2A_3$ sachant que des frottements solides de coefficient de friction μ interviennent au-delà du point A_2.

Ex 8 : tige avec ressort



On considère une tige fixe dans un plan vertical xOz, faisant un angle α avec l'axe Oz. Un anneau M de masse m est enfilé sur la tige et contraint de se déplacer sans frottement le long de celle-ci. Cet anneau est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée en O. On repère la position de M par $OM = X$.

1) Quelles sont les forces appliquées à l'anneau ? En déduire son énergie potentielle Ep en fonction de X et α. On prendra comme référence des énergies potentielles X= ℓ_0.
2) Etudier la fonction Ep(X) et tracer son allure.
3) En déduire s'il existe une position d'équilibre et si oui dire s'il est stable ou non.
4) On considère les conditions initiales suivantes : X(0) = ℓ_0 et $\dot{X}(0)=V_0$. Placer Em sur le graphique d'énergie potentielle. En déduire si le mouvement est libre ou lié ou dans un état de diffusion.
5) Etablir l'équation du mouvement par un théorème énergétique et en déduire la période du mouvement.

Ex9 : remonte pente

Un remonte-pente est constitué d'un câble auquel les skieurs s'accrochent pour remonter. Déterminer la puissance du moteur qui entraîne le câble.

Données :
- ▷ Longueur totale du câble : 200 m ;
- ▷ Distance séparant deux skieurs : 5 m ;
- ▷ Dénivelé entre les extrémités du câble : 5 m ;
- ▷ Vitesse du câble : $5\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.
- ▷ Lorsque le ski glisse sur la neige, la réaction tangentielle $\vec{R}_\mathrm{T}$ du sol sur le ski est reliée à la réaction normale $\vec{R}_\mathrm{N}$ par $||\vec{R}_\mathrm{T}|| = f||\vec{R}_\mathrm{N}||$ avec $f \simeq 0{,}1$.

Ex 10 Freinage d'un satellite dans l'atmosphère

On considère un satellite de masse m en orbite basse circulaire de rayon r autour de la Terre de masse M_{T}. Comme le satellite est en orbite basse, il se trouve dans les couches supérieures de l'atmosphère et subit une force de frottement. On suppose ces frottements suffisamment faibles pour que l'orbite reste quasi-circulaire sur un tour.

1 - Retrouver l'expression de la vitesse v du satellite dans le référentiel géocentrique en fonction de G, M_T, r et d'un vecteur, puis celle de son énergie mécanique E_{m} (en fonction de G, M_T, r et m). (Donc dans cette question on néglige les frottements.)

2 - Le travail des forces de frottements est-il moteur ou résistant ? En déduire le signe de $\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$.

3 - Comment évolue le rayon de l'orbite du satellite au cours du temps ? Tracer l'allure de sa trajectoire dans le référentiel géocentrique.

4 - En déduire comment évolue sa vitesse. Est-ce que ceci était intuitif ?

5 - On suppose que les forces de frottement sont de la forme $\vec{f} = -\alpha m v \vec{v}$ avec $\alpha > 0$ une constante estimée à $\alpha = 1{,}5 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}^{-1}$.

a - On raisonne sur une orbite (un seul tour) du satellite, que l'on peut supposer circulaire uniforme.

Appliquer le théorème de l'énergie mécanique sur cette orbite, et en déduire la variation d'énergie mécanique ΔE_m pour un tour, en fonction de α, G, m, M_T.

b - (question plus difficile) Utiliser ensuite l'expression de E_m obtenue à la question 1 pour en déduire la variation Δr de r sur une orbite (ce qui est donc la perte d'altitude du satellite), en fonction de r et α seulement.

On utilisera un développement limité :

$$\frac{1}{r-\Delta r} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{1-\Delta r/r} \underbrace{\simeq}_{\Delta r/r \ll 1} \frac{1}{r}(1+\Delta r/r).$$

Faire l'A.N. pour une altitude de 200 km.

c - Combien de jours faut-il pour perdre une altitude de 10 km ?