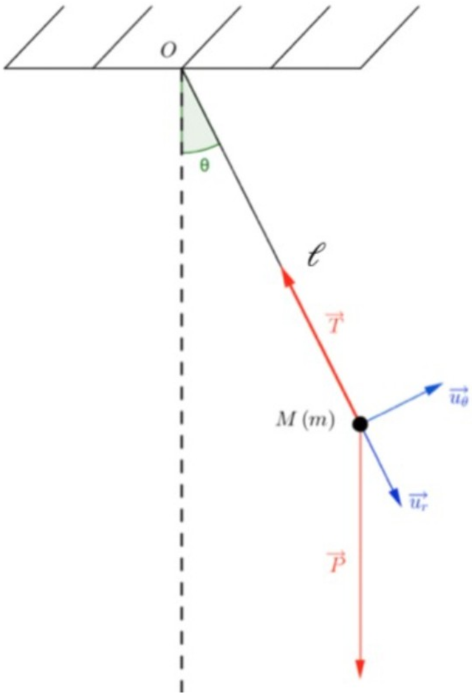
TP : pendule simple

But : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement l'équation différentielle du deuxième ordre non linéaire et mettre en évidence le non-isochronisme des oscillations.

I. Positionnement du problème



Nous avons déjà vu que l'équation différentielle qui régit le mouvement du pendule simple (voir ci-contre) est la suivante :

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin(\theta)=0$$

On considère les conditions initiales suivantes :
$\theta(t=0)=\theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0=0$

Cette équation est non linéaire à cause du terme en sin θ.

On peut la linéariser pour de petits angles $\theta \ll 1$ car alors $\sin(\theta)\approx\theta$.

On obtient : $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$ dont la solution est :

$\theta(t)=\theta_0\cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$

donc une période propre $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

On souhaite mettre en évidence le non isochronisme des oscillations c'est à dire le fait que le système varie périodiquement avec une période T dont la valeur s'écarte de la période propre T_0 au fur et à mesure que l'on s'éloigne des petits angles.

Pour cela on va utiliser la fonction odeint sur python.

II. Approche numérique

1) utilisation de odeint

Sur python, il faut tout d'abord importer les bibliothèques permettant d'utiliser la fonction odeint et importer la bibliothèque permettant de gérer les tableaux et certaines fonctions mathématiques :

```
import matplotlib.pyplot as plt # pour les graphiques
import numpy as np # pour les tableaux
import scipy.integrate as integr # pour les outils numeriques comme odeint
```

On utilise la fonction odeint de la librairie scipy.integrate dont voici la syntaxe :

```
y_sol = integr.odeint(F, y_ini, t)
```

Paramètres de odeint :

- F est une fonction du type F(Y,t), qui renvoie la valeur de la dérivée de Y à l'instant t. Pour résoudre une équation d'ordre 1, Y est un scalaire. Mais si l'équation est d'ordre 2, alors Y est de type vecteur : $Y(t)=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$
- y_ini : valeur initiale de Y. C'est un couple qui a autant de composantes que Y.
- t est un tableau qui contient les instants auxquels la solution sera calculée.

Exemple :

Pour résoudre, l'équation différentielle $\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+3y(t)=\sin t$ dont les conditions initiales sont $y(t=0)=0$ et $\dot{y}(t=0)=1$

On pose $Y(t)=\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\dot{Y}(t)=\begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$ vérifiera $\dot{Y}(t)=\begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -2\dot{y}(t)-3y(t)+\sin t \end{pmatrix}$

On arrive donc à une équation du premier ordre sur Y :

$$\frac{dY}{dt}=F(Y) \text{ avec } F(Y)=\begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -2\dot{y}(t)-3y(t)+\sin t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ -2y_1-3y_0+\sin t \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la représentation graphique de y sur l'intervalle [0, 3 π], on pourra utiliser le code suivant :

```
def f(y,t)
        return np.array( [ y[1], -2*y[1]-3*y[0] + np.sin(t) ] )

T = np.linspace(0, 3*np.pi,1000)
Y= integr.odeint( f , (0,1), T)
plt.plot(T,Y[ :,0])
plt.show
```

2) utilisation de odeint pour le pendule simple

On voit donc que la fonction odeint a une syntaxe particulière, qui oblige à transformer l'équation d'ordre 2 sur θ, en une équation d'ordre 1 sur le couple $y=\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$.

On parle parfois de vecteur à deux composantes pour désigner y :

– sa première composante est $y_0=\theta$,

– sa seconde composante est $y_1=\dot{\theta}$.

Travail à faire :

a) Trouver les composantes du vecteur $\dot{y}=\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}$

b) Repérer dans le programme fourni par le professeur les lignes de code où F est défini et compléter ce que retourne la fonction F après le mot return :

```
def F(y,t):
    return ( … , … ) # a compléter
```

c) le reste du programme est déjà complété. Vous pouvez repérer où est fixé l'angle initial θ_0 pour le modifier à 10° par exemple et aussi changer la longueur l du pendule pour qu'elle corresponde au matériel disponible. Vérifier la bonne exécution du programme.

d) Explorer les différents angles initiaux θ_0. À partir de quel angle voit-on clairement un désaccord entre la solution sans approximation (équation avec sin θ) et la solution avec petits angles (approximation $\sin\theta \simeq \theta$) ?

e) À l'aide de votre simulation numérique, mesurer la période T_{simu} des oscillations pour des angles initiaux de 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 85°. Consigner les résultats dans un tableau :

θ_0(°)	10	20	30	40	50	60	70	80	85
T_{simu} (s)									

f) Sur Excel, tracer T_{simu}/T_0 en fonction de θ_0.

III. Approche expérimentale

On souhaite vérifier les résultats précédents expérimentalement à l'aide du pendule à votre disposition.

Le pendule n'étant pas idéal, les oscillations s'amortissent au cours du temps ce qui modifie l'angle initial. Généralement, pour diminuer l'incertitude sur les mesures, on mesure la durée de plusieurs oscillations (10 par exemple).
Méthode proposée : pour mesurer la période des oscillations en fonction de l'angle initial, on prendra un compromis en mesurant la durée de 2 oscillations et on fera cette mesure 5 fois.

1) En suivant la méthode proposée, mesurer T_0 en prenant θ_0 = 10°.
2) Estimer l'incertitude sur T_0 à l'aide de l'outil statistique de votre calculatrice :
   $u(T_0)=\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$ où n = 3 mesures et σ_{n-1} est l'écart type échantillon.
3) Votre valeur est-elle en accord avec celle attendue ? On utilisera le z-score (ou écart normalisé en français) pour répondre.
4) Faire ensuite des mesures de T pour θ_0 = 30°, 50°, 70° et compléter le tableau ci-dessous :

θ_0 (en °)	10	30	50	70
Texp (en s)				
u(Texp) (en s)				

5) Sur Excel, ajouter vos points expérimentaux en faisant apparaître T_{exp}/T_0 en fonction de θ_0. Idéalement, on ajoutera les barres d'incertitudes verticales u(T) et horizontales u(θ)=1°.
6) Vos résultats semblent-ils en accord avec les résultats numériques ?

IV. Conclusions

Résumer les résultats obtenus. En particulier, indiquer si les oscillations du pendule sont isochrones ou non et quelle est la période qui sert de référence ?