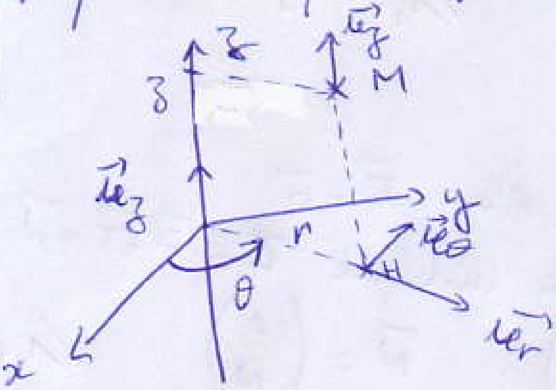
| DS méca du point |

Ex 1 : 17

1) L'énoncé indique que la voiture reste à distance constante de l'axe du parking et le dessin montre que le bâtiment est cylindrique. Il semble donc naturel de choisir l'axe mentionné comme l'axe (Oz) vertical d'un repère cylindrique.

/1 De plus la voiture reste à distance constante de cet axe ce qui suggère un mouvement à rayon constant dont le repérage en coordonnées cylindriques rendra la résolution du problème plus facile.

2)



$\vec{OM} = r\vec{u_r} + z\vec{u_z}$

On note R le rayon constant de la trajectoire de la voiture : $\boxed{r(t) = R}$ /1

La voiture a une vitesse constante.

Donc la vitesse descendante sera constante. On note V_z cette vitesse. /1

Alors $\boxed{z = \underbrace{-V_z . t}_{\text{La voiture descend donc } z \searrow} + \underbrace{z_0}_{\text{altitude de départ}}}$

3) $\vec{V} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}$

$= \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z} = \boxed{R.\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} - V_z . \vec{u_z} = \vec{V}} = \vec{cte}$ /1

pour avoir $\vec{V}$ constant, il faut $\dot{\theta}$ constant. /1

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

$\boxed{\vec{a} = -R.\dot{\theta}^2\vec{u_r}}$ /1

Remarque : Le référentiel est terrestre supposé galiléen. +0,5

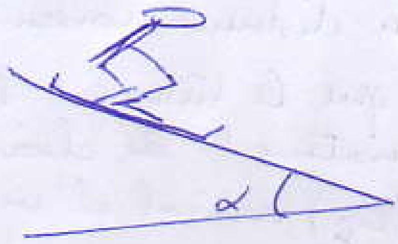
4) On voit que $\vec{a}$ est porté par $\vec{u_r}$ donc l'accélération est bien radiale.

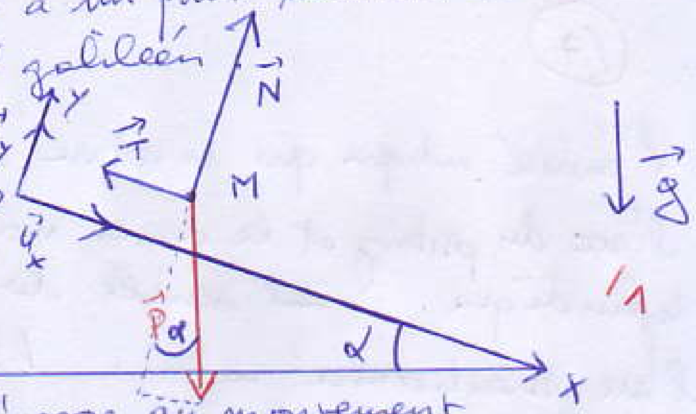
/1

Ex2 : A) STATIQUE /11,5

1) système : skieur assimilé à un point matériel de masse m /1
référentiel : terrestre supposé galiléen

2)





/1

3) La force de frottement $\vec{T}$ s'oppose au mouvement
Sur le schéma de la question 2 elle est donc /1
vers la gauche : $\vec{T} = -T\,\vec{u}_x$ avec $T > 0$

4) Bilan des forces :
poids $\vec{P} = m\vec{g}$ /1,5 + /1,5
Réaction : $\vec{R} = \underbrace{\vec{T}}_{\text{tangentielle}} + \underbrace{\vec{N}}_{\text{normale}}$

à l'arrêt pas de frottement de l'air $\vec{F} = \vec{0}$

5) à l'arrêt, la 2^e loi de Newton indique $\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$ /1,5

$\vec{P} = \begin{pmatrix} mg \sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{pmatrix}$ $\quad \vec{T} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$

on en déduit $T = mg\sin\alpha$ et $N = mg\cos\alpha$
Or on sait que $T \leq N \times f_s$ tant qu'il n'y a pas de glissement. /1

A la limite du glissement on aurait $T = N \times f_s$
Soit $\sin\alpha_{MAX} = (\cos\alpha_{MAX}) \times f_s \Rightarrow \boxed{\alpha_{MAX} = \arctan(f_s)}$ /1

Le skieur reste immobile tant que $\alpha < \alpha_{MAX}$ /1
avec $\boxed{\alpha_{MAX} = 0{,}73 \text{ rad} = 42°}$ /1

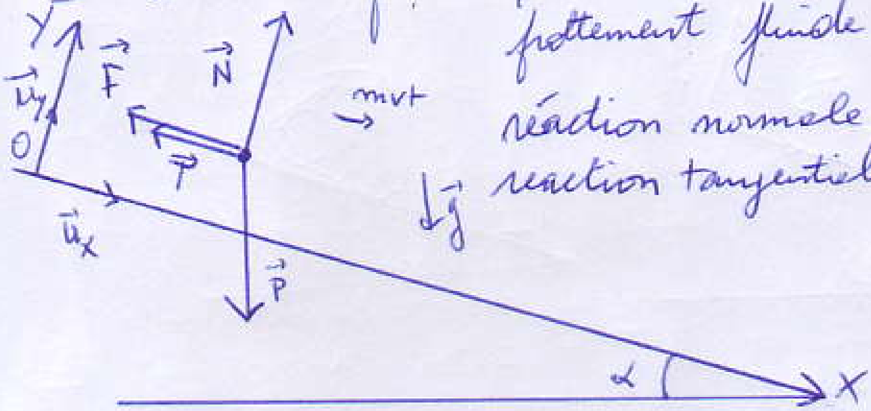
Ex2 : B) glisse : /19

6] Bilan des forces : poids $\vec{P}$

frottement fluide : $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$

réaction normale $\vec{N}$

réaction tangentielle $\vec{T}$



/2

7] Comme en 5] on a :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{pmatrix} \quad \vec{T} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$$

/1

et $\vec{F} = \begin{pmatrix} -\lambda v \\ 0 \end{pmatrix}$ où v est la vitesse : $\vec{v} = v.\vec{u}_x$

2e loi de Newton : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}$ /1

avec le mouvement qui reste tel que $y = 0 = cte$

on a $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - T - \lambda v \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$

On en déduit $\boxed{N = mg\cos\alpha} = \|\vec{N}\|$ /1

et $\|\vec{T}\| = T = f_g \|\vec{N}\| = f_g\, mg\cos\alpha = \boxed{f_g\, mg\cos\alpha = T}$

/1

8] $\vec{OM} = x.\vec{u}_x$

$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u}_x = v.\vec{u}_x$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = g(\sin\alpha - f_g\cos\alpha)$$

$v(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + \dfrac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f_g\cos\alpha)$ avec $\tau = \dfrac{m}{\lambda}$

$v(0) = 0 = A + \dfrac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f_g\cos\alpha)$

$$A = -\frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f_g\cos\alpha)$$

Donc $v(t) = \frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f_g\cos\alpha)\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$

$$\boxed{v(t) = g\tau(\sin\alpha - f_g\cos\alpha)\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \quad \text{avec } \tau = \frac{m}{\lambda}}$$ /2

$$\boxed{x(t) = g\tau(\sin\alpha - f_g\cos\alpha)\left[t + \tau e^{-t/\tau}\right] + C}$$ ~ m

on vérifie que $x=0$ à $t=0$

$$g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha).\tau + C = 0 \Rightarrow C = -g\tau^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

Donc $$\boxed{x(t) = g\tau(\sin\alpha - f_g\cos\alpha)\left[t - \tau + \tau e^{-t/\tau}\right]}$$ /2

9) $v_L = \lim_{t\to\infty} v(t) = g\tau(\sin\alpha - f_g\cos\alpha)$ /1

A.N. $v_L = 9,8 \times \frac{85}{1,0} \times \left[\sin(40°) - 0,78 \times \cos(40°)\right]$

$\boxed{v_L = 37,7\ m.s^{-1}} = 136\ km.h^{-1}$ /1

10) T est telle que $v = v_L/2$:

$$\frac{1}{2} g\tau(\sin\alpha - f_g\cos\alpha) = g\tau(\sin\alpha - f_g\cos\alpha)\left[1 - e^{-T/\tau}\right]$$

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-T/\tau}$$

$$e^{-T/\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow +T/\tau = +\ln 2$$ /2

$$T = \tau \ln 2 = \boxed{\frac{m}{\lambda}\ln 2 = T}$$

A.N. $T = \frac{85}{1,0}\ln 2 = \boxed{58,9\ s = T}$ /1

11) on a alors : $\cancel{m}\ddot{x} = \cancel{m} g\sin\alpha - 5 f_g \cancel{m} g\cos\alpha = g\left[\sin\alpha - 5 f_g\cos\alpha\right]$

A.N. : $\ddot{x} = -23\ m.s^{-2}$ /2

$\dot{x} = v = \frac{v_L}{2} - 23.t$ $\quad v = 0$ pour $t = \frac{v_L}{2\times 23}$

A.N. : $\boxed{t = 0,82\ s}$ /1

$d = x(t) = \frac{v_L}{2}.t - 23\frac{t^2}{2} + 0$ $\quad$ A.N pour $t = 0,82\ s$: $\boxed{d = 7,7\ m}$ /1