TP-cours

Echantillonnage d'un signal analogique .
Filtrage d'un signal numérique.

Introduction

La plupart des signaux physiques à traiter ou à transmettre (signaux en sortie de capteurs, voix humaine…) sont **analogiques** : **ils évoluent de façon continue au cours du temps** et prennent leurs valeurs dans un espace continu de valeurs.

Le signal est dit analogique si la grandeur physique X(t) peut prendre un ensemble continu de valeurs et est définie sur un intervalle de temps continu.

La transmission directe de signaux analogiques (dans un câble, une fibre optique ou par voie hertzienne) occasionne de nombreux problèmes liés aux conditions de propagation (parasites, forte atténuation des signaux...). C'est pour cela que l'on choisit d'utiliser un **signal numérique**.

Le signal est dit numérique si la grandeur physique prend des valeurs appartenant à un ensemble discret/fini X_1,X_2, etc. et ne varie qu'à certains instants discrets t_1, t_2, etc. Le nombre de valeurs possibles prises par le signal est généralement une puissance de 2.

Les transmissions numériques permettent d'**augmenter**
- la quantité d'informations stockées (par exemple sur un disque dur d'un ordinateur, une carte SD dans un smartphone, etc) **ou transmises** (plusieurs chaines de télévision par canal en numérique)
- **la qualité de transmission** de l'information en réduisant les problèmes liés aux conditions de propagation (on ne transmet que des 0 ou des 1) .

Elles nécessitent une plus faible puissance d'émission. De plus, les traitements numériques (filtrage par exemple) des signaux présentent des caractéristiques intéressantes car ils permettent de faire facilement des modifications et des réglages : pas besoin de changer ou d'ajouter des composants comme en électronique analogique, une modification de l'algorithme de traitement suffit.

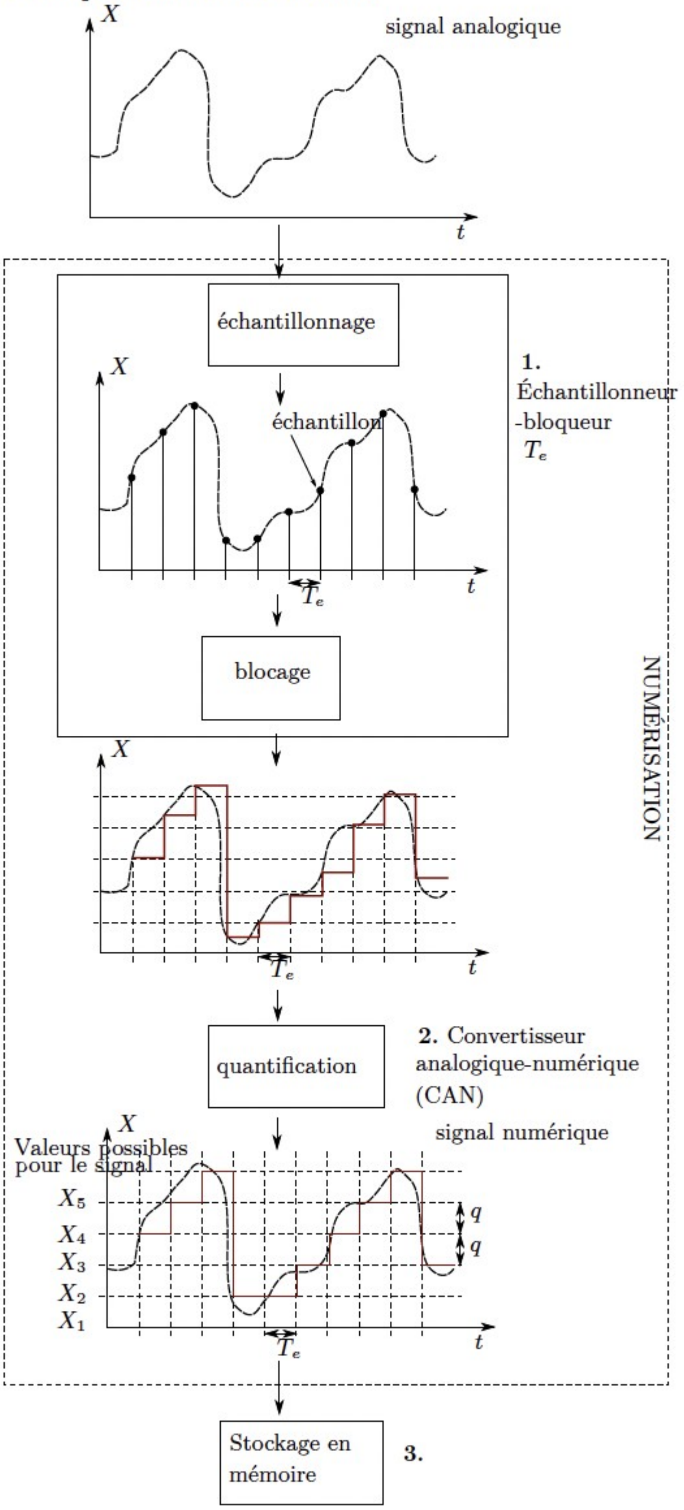
Exemples :

- la TNT, télévision numérique terrestre, qui a remplacé la télévision hertzienne ;

- les oscilloscopes modernes qui numérisent le signal d'entrée pour pouvoir l'analyser et qui ont remplacé les oscilloscopes analogiques.

Les signaux analogiques doivent être convertis en numérique pour des raisons de transmission et de traitement, de stockage. Pour réaliser un traitement ou une transmission numérique, il faudra donc dans un premier temps convertir le signal analogique en signal numérique. Cette conversion s'effectue en plusieurs étapes :

Principe de la numérisation :



Bloc 1 : transducteur

Le signal analogique d'intérêt (température, vitesse, position, etc.) est converti en tension analogique.

Bloc 2 : échantillonneur-bloqueur

La tension analogique est envoyée en entrée d'un échantillonneur-bloqueur. Son rôle est de bloquer la valeur de la tension à un niveau constant pendant une durée T_e appelée **période d'échantillonnage**. La valeur est actualisée tous les T_e.

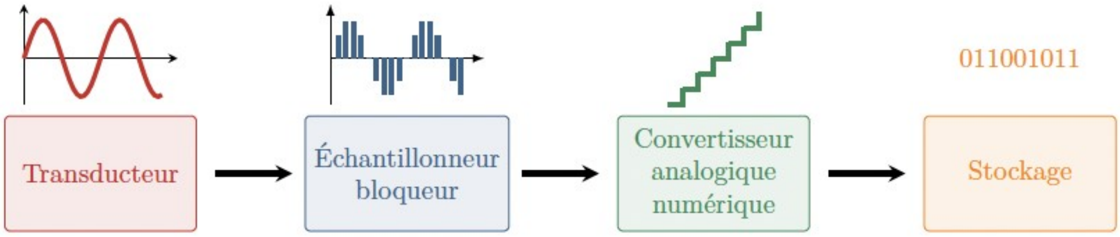
Bloc 3 : convertisseur analogique numérique

En sortie de l'échantillonneur-bloqueur, la tension est toujours analogique : elle peut prendre n'importe quelle valeur. Comme un système numérique ne peut traiter que des données codées en binaire avec un nombre de bits fini, il faut discrétiser les valeurs prises. C'est le rôle du convertisseur analogique numérique, usuellement abrégé CAN, qui attribue à la tension la valeur binaire permise la plus proche (ou immédiatement inférieure) à sa valeur réelle.

Les cartes d'acquisition, par exemple SYSAM ou ARDUINO, contiennent les deux blocs échantillonneur-bloqueur et CAN.

Bloc 4 : stockage

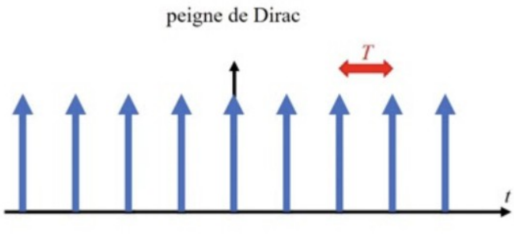
Les valeurs de sortie du CAN sont enfin stockées en mémoire pour être affichées ou manipulées.



Le calibre C donne la gamme de valeurs que le signal numérisé est susceptible de prendre. Il doit être supérieur à la valeur maximale du signal analogique, sans quoi le signal numérisé fait apparaître un phénomène de saturation. La valeur 2C, c'est-à-dire la largeur de l'intervalle de valeurs permises, est la tension de pleine échelle du CAN.
La résolution N indique le nombre de bits sur lequel le signal numérisé est codé : 2^N valeurs sont possibles dans l'intervalle $[-C,+C]$, ou autrement dit cet intervalle est divisé en $2N - 1$ intervalles de largeur identique.
Pas de quantification : $p = \frac{2C}{2^N - 1} \simeq \frac{C}{2^{N-1}}$

1- Echantillonnage d'un signal analogique

1-1 Principe
Échantillonner (ou discrétiser) un signal analogique $v_a(t)$ consiste à prendre des valeurs de ce signal (échantillons) à des instants donnés discrets (instants d'échantillonnage) régulièrement espacés de T_e , T_e étant la période d'échantillonnage. $f_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage.

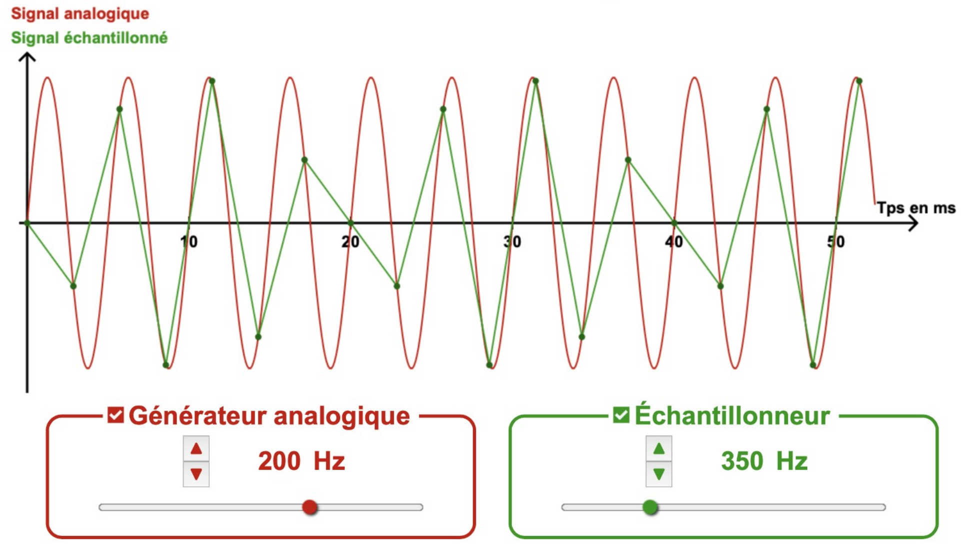


$$Ш_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

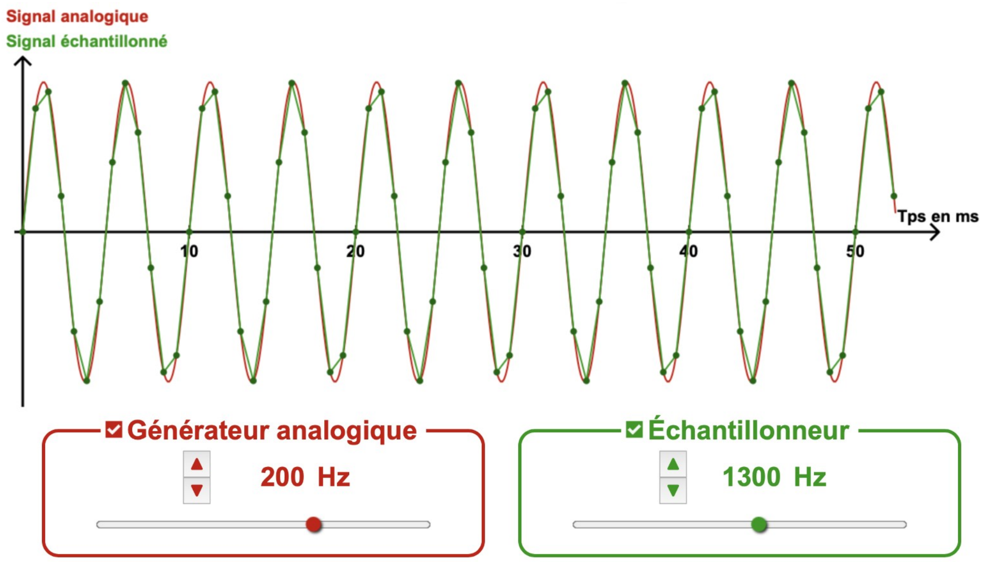
►Afin de pouvoir transmettre (ou traiter) un signal numérisé sans détérioration , on ne peut pas choisir n'importe quelle fréquence d'échantillonnage.

1-2 Mise en évidence de l'importance du choix de la fréquence d'échantillonnage :

https://physique.ostralo.net/echantillonnage/



1.75 points échantillonnés par période analogique.



6.5 points échantillonnés par période analogique.

Conclusion : il faut que la fréquence d'échantillonnage soit suffisamment élevée pour que le signal échantillonné soit raisonnablement fidèle au signal analogique.

1-3 Spectre d'un signal sinusoïdal échantillonné

Soit un signal analogique sinusoïdal de fréquence f : $V_a(t) = V_0 \cos(2\pi ft)$.

C'est une onde pure qui oscille à une fréquence f , en continu.

On échantillonne avec des impulsions de fréquence f_e :

$$\text{signal } x(t) = c_0 + c_1 \cos(2\pi f_e t + \varphi) + \ldots + c_k \cos(2\pi k f_e t + \varphi_k)$$

f_e est la fréquence d'échantillonage.

Les termes c_k et φ_k décrivent les amplitudes et les phases des différentes harmoniques du signal d'échantillonnage.

Ce signal a des composantes fréquentielles multiples : une fréquence fondamentale f_e et ses harmoniques $2f_e$, $3f_e$,….(peigne de Dirac).

Le signal échantillonné est le produit V_a. x(t).

Mathématiquement, cela revient à multiplier deux cosinus :

$V_0 \cos(2\pi ft) \cdot \cos(2\pi kf_e t+\varphi_k)$

Rappel :
en trigonométrie, le produit de deux cosinus s'écrit : $\cos(A) \cdot \cos(B) = 1/2\ (\cos(A-B)+\cos(A+B))$

En appliquant cette identité à notre cas :

- $A = 2\pi ft$ (f est la fréquence du signal analogique),
- $B = 2\pi kf_e t + \varphi_k$ (relatif à l'harmonique k du signal d'échantillonnage).

On obtient :

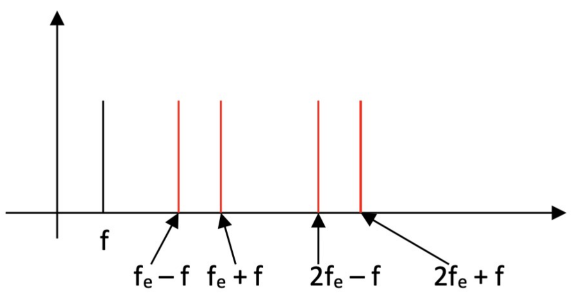
$\cos(2\pi ft)\cdot\cos(2\pi kf_e t +\varphi_k) = 1/2(\cos(2\pi(kf_e-f)\ t + \varphi_k\ ) + \cos(2\pi(kf_e+f)\ t + \varphi_k))$

Signification physique des termes obtenus.

Le résultat montre

- de nouvelles fréquences générées : $f_e - f$; $f_e + f$; $2f_e - f$; $2f_e + f$ …..

  - $(k\ f_e-f)$: une fréquence plus basse résultant de la différence entre $k\ f_e$ et f.
  - $(k\ f_e+f)$: une fréquence plus élevée résultant de la somme de $k\ f_e$ et f.



- une superposition spectrale (aliasing) : si f_e (la fréquence d'échantillonnage) n'est pas suffisamment élevée, ces nouvelles fréquences peuvent se superposer (repliement de spectre).

Pour éviter cette superposition, la condition de Nyquist-Shannon doit être respectée pour que les raies dues à l'échantillonnage ne se mélangent pas aux raies du signal de départ, il faut $f < f_e - f$, soit $2\ f < f_e$

- un contenu fréquentiel différent après échantillonnage : le spectre du signal échantillonné contient des copies du spectre du signal analogique autour des multiples de f_e .

Conclusion : <u>Nyquist – Shannon</u>

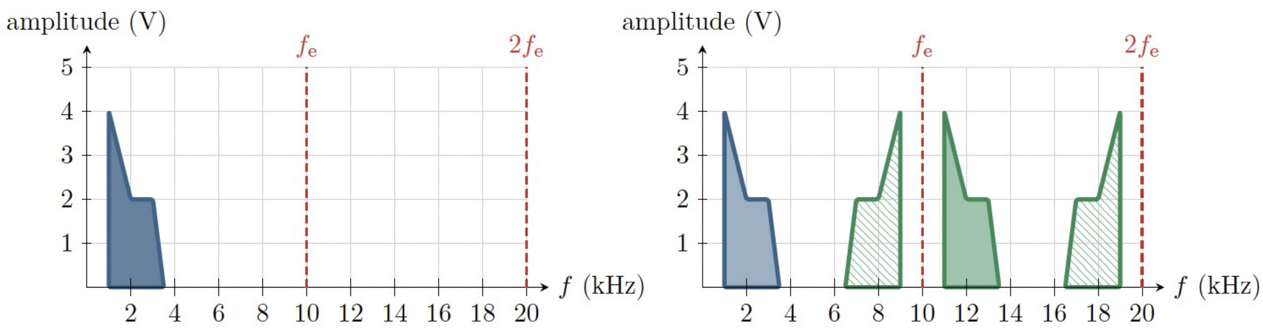
Un signal analogique de fréquence f est reconstitué fidèlement en technologie numérique à partir de ses échantillons lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e vérifie $2\ f < f_e$

<u>Généralisation</u>

D'après le théorème de Fourier, n'importe quel signal périodique peut s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux,

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)\,.$$

Par linéarité de l'échantillonnage, chacune des composantes harmoniques subit le même phénomène de réplication lors du processus d'échantillonnage, et il se retrouve donc sur le spectre du signal complet comme représenté ci-dessous.



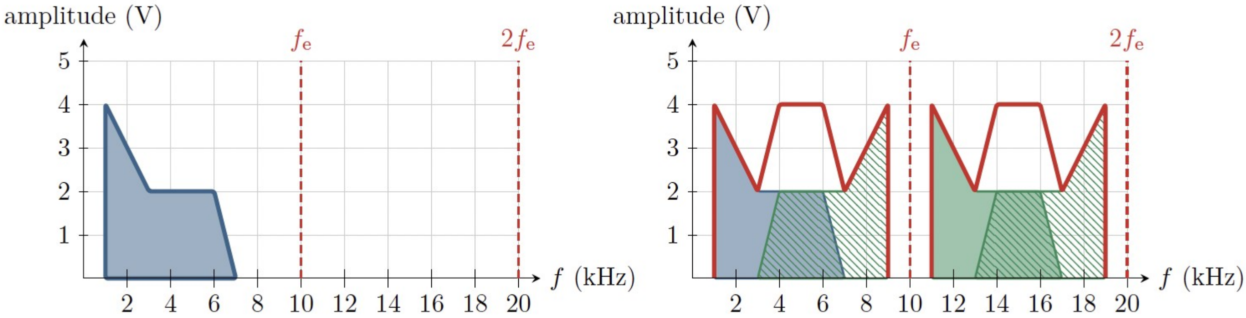
Le signal possède un spectre compris entre 1 et 3,5 kHz et il est échantillonné avec la fréquence f_e = 10 kHz. La figure de gauche représente le spectre du signal analogique, celle de droite le spectre du signal échantillonné, présentant des répliques du spectre.

L'échantillonnage d'un signal entraîne une réplication périodique de son spectre : toute composante de fréquence f est répliquée aux fréquences $k\ f_e \pm f$, k entier.

Dans le cas d'un signal V_a complexe (périodique quelconque), la condition de Nyquist – Shannon s'écrit : $f_e > 2\ f_{max}$

Si fe < 2 f_{max} il y a superposition des bandes de fréquence dupliquées : on dit qu'il y a repliement. Dans ce cas il y a perte d'informations et la reconstitution du signal analogique n'est plus possible

Repliement spectral ou aliasing: le spectre et ses répliques sont impossibles à séparer.



Spectre d'un signal quelconque échantillonné en présence de recouvrement spectral. Le signal possède un spectre compris entre 1 et 7 kHz et il est échantillonné avec la fréquence f_e = 10 kHz. La figure de gauche représente le spectre du signal analogique. La figure de droite représente la construction du spectre du signal échantillonné, en tenant compte du recouvrement spectral.

Applications :
- Signaux audio : échantillonnés à 44,1 kHz
- Téléphonie : échantillonnage à 8 kHz (voix de 100 à 3500 Hz).

2- Exemples

<u>Exemple 1</u>
Soit un signal $V_a(t)$ de fréquence 100 Hz .

1^er^ cas : on choisit la fréquence d'échantillonnage f_e = 500 Hz . Le signal est-il correctement échantillonné ?

2nd cas : on choisit la fréquence d'échantillonnage f_e = 105 Hz , est-ce un choix judicieux ? On observe l'apparition d'une composante à 5Hz, expliquer.

3ième cas : le signal V_a de fréquence 5 Hz est échantillonné pour f_e = 105 Hz. Expliquer pourquoi on obtient le même résultat après échantillonnage qu'au 2nd cas.

Conclusion pratique

Pour éviter l'aliasing, respectez toujours la condition $f_e > 2 \cdot f_{max}$. Si f_e est mal choisi, des fréquences incorrectes (alias) apparaissent, rendant impossible la reconstruction fidèle du signal.

Un filtre anti-repliement est crucial pour supprimer les hautes fréquences avant l'échantillonnage.

Un filtre anti-repliement est un passe-bas d'ordre élevé (6 ou 8), placé avant l'échantillonneur et qui permet de supprimer les harmoniques du signal analogique de fréquence supérieure à $f_e/2$.

Exemple 2

Supposons un signal contenant des fréquences f_1 = 100 Hz et f_2 = 700 Hz.

1er cas : échantillonnage sans filtre anti-repliement :

Si f_e= 500 Hz, la fréquence de Nyquist est $f_e/2$=250 Hz.

- La composante à 100 Hz reste inchangée.
- La composante à 700 Hz est repliée : $f_{alias}=|700-500|$ = 200 Hz.

On obtient un spectre contenant des fréquences incorrectes, à 100 Hz et 200 Hz. Le signal original est perdu.

2nd cas : échantillonnage avec filtre anti-repliement :

- Le filtre anti-repliement supprime toutes les fréquences au-delà de 250 Hz.
- La composante à 700 Hz est éliminée avant l'échantillonnage.
- Le signal échantillonné contient uniquement la fréquence à 100 Hz, sans aliasing.

Conclusion

Un filtre anti-repliement est indispensable car :

- il élimine les hautes fréquences susceptibles de provoquer un aliasing.
- il garantit que le spectre du signal échantillonné ne présente pas de chevauchement, rendant possible la reconstruction fidèle du signal original après échantillonnage.

En résumé, sans ce filtre, des composantes parasites (alias) apparaîtront dans le spectre échantillonné, ce qui dégradera la qualité du traitement et de la transmission numérique.

Résumé sur le choix des paramètres d'acquisition :

Les paramètres d'acquisition du signal peuvent être définis directement par des boutons (oscilloscope), par une interface graphique (logiciels type LatisPro) ou par l'intermédiaire d'un script de commande (carte d'acquisition type Arduino).

Fréquence d'échantillonnage :

→ *plus elle est élevée, meilleure sera « l'image » du signal, mais les données seront d'autant plus lourdes à stocker et à traiter ;*
→ *elle doit au moins respecter le critère de Shannon ($f_e > 2\ f_{max}$), sinon il faut utiliser un filtre anti-repliement ;*
→ *le traitement numérique du signal échantillonné peut imposer d'autres contraintes.*

Durée d'acquisition :

→ *plus elle est élevée, meilleure sera la résolution spectrale du signal, mais les données seront d'autant plus lourdes à stocker et à traiter.*

Nombre d'échantillons :

fixé par la fréquence d'échantillonnage et la durée d'acquisition, $N_e = f_e\, T_{acq}$.
→ *en pratique, il est souvent limité, ce qui nécessite un compromis entre fréquence d'échantillonnage et durée d'acquisition.*

Calibre :
→ *plus il est faible, meilleur sera le pas de quantification et donc la résolution (en volt) du signal ... mais s'il est trop faible il y aura saturation pour les valeurs élevées ;*
→ *il faut donc choisir le calibre immédiatement supérieur à la valeur maximale du signal.*