p1/

TDM3 Mvt et NRJ correction

Ex1 :

$C = 500\ Wh = E_{batterie}$

$m = 100\ kg$

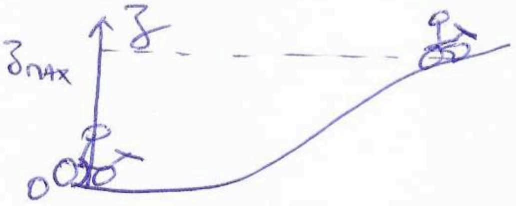
On considère la situation idéale dans laquelle toute l'énergie de la batterie est convertie en énergie mécanique afin de faire avancer le cycliste jusqu'à une altitude maximale.

$E_m = E_{batterie} = cte$ (pas de pertes d'Em durant le mvt du cycliste c'est à dire toutes les forces sont conservatives).

$E_{m0} = 500\ Wh$

$= 500 \times 3600\ J$

$= 1{,}8 \times 10^6\ J$

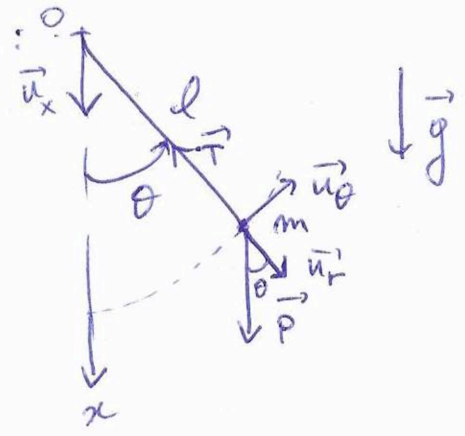


$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mgz$

A $z = z_{MAX}$, $v = 0$ donc $mgz_{max} = E_{m0} \Rightarrow z_{max} = \frac{E_{m0}}{mg}$

$z_{max} = \frac{1{,}8 \times 10^6}{100 \times 9{,}81} = 1{,}8 \times 10^3\ m = \boxed{1{,}8 \times 10^3\ m = z_{MAX}}$

Ex2 :



référentiel terrestre (galiléen)

1) Bilan des forces : $\vec{P}$ et $\vec{T}$

$\delta W(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{dl} = \vec{T} \cdot (l . d\theta\, \vec{u}_\theta) = 0$ car $\vec{T} \perp$ à $\vec{u}_\theta$

$\vec{T}$ ne travaille pas

$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{dl}$ $\quad \vec{P} = \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{pmatrix}$

$= -mg\sin\theta . l\, d\theta$

$\delta W(\vec{P})$ peut se mettre sous la forme

$\delta W = -dE_p \Rightarrow dE_p = mg\sin\theta . l\, d\theta$

$\frac{dE_p}{d\theta} = mgl\sin\theta$

$\boxed{E_p(\theta) = -mgl\cos\theta + C}$

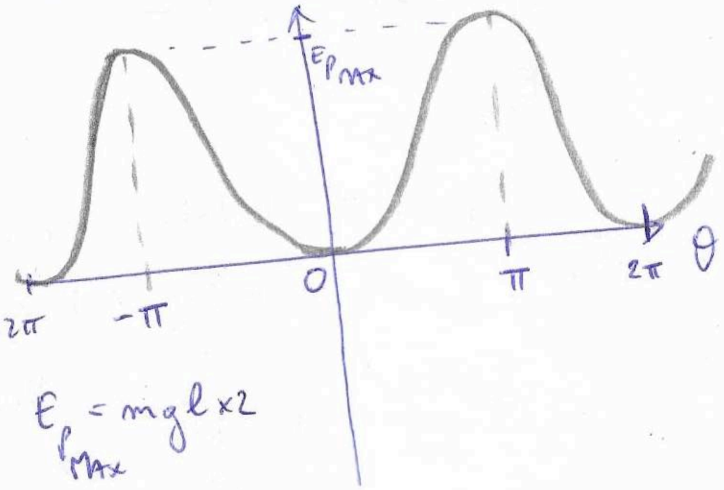
on choisit $E_p = 0$ pour $\theta = 0$

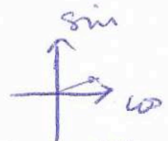
alors $\boxed{E_p(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)}$

Ex2 (suite)

$E_p = mgl(1-\cos\theta)$

$\frac{dE_p}{d\theta} = mgl\sin\theta$





θ	0	π	2π
$\sin\theta$	+	0	−
E_p	$0 \nearrow$	$2mgl$	$\searrow 0$

$E_{p_{MAX}} = mgl \times 2$

Les positions d'équilibre sont telles que $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$ soit $\sin\theta_n = 0$

alors $\boxed{\theta_n = n.\pi \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}}$

Stabilité des positions d'équilibre : $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = +mgl\cos\theta$

$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0$ vrai pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[+ 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Donc $\theta_{n'} = 0 + 2n'\pi$ avec $n' \in \mathbb{Z}$ sont des positions d'équilibre stables.

$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} < 0 \Rightarrow \cos\theta < 0 \Rightarrow \theta \in]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}[+ 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Donc $\theta_{n'} = \pi + 2n'\pi = (2n'+1)\pi$ avec $n' \in \mathbb{Z}$ sont des positions d'équilibre instables.

3) $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + E_{p_0}$

$\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgl(1-\cos\theta_0)}$

θ_{MAX} existe si $E_m \leq E_{p_{MAX}} = mgl \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgl(1-\cos\theta_0) \leq mgl$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - mgl\cos\theta_0 \leq 0$

$v_0^2 \leq 2gl\cos\theta_0$

Alors $E_m = E_{m0} = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta)$

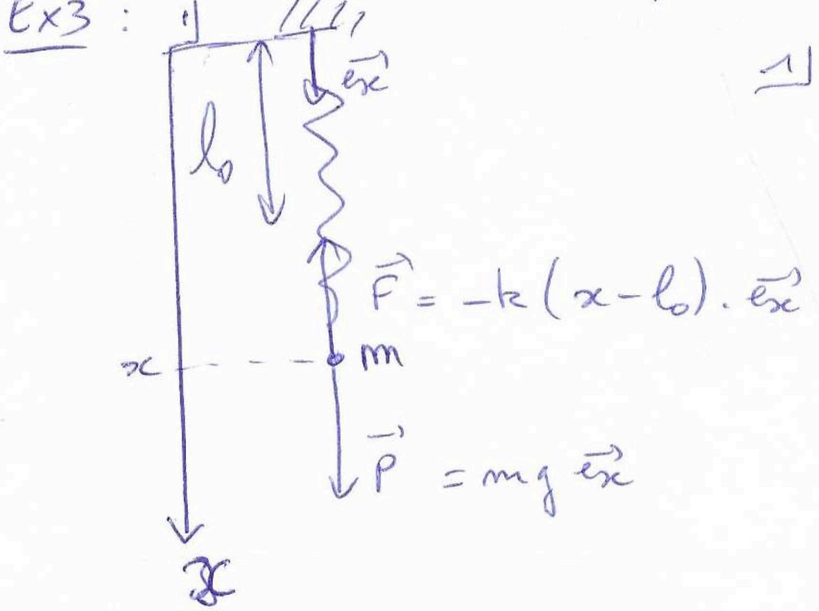
Si $\theta = \theta_{MAX}$ alors $v = 0 \Rightarrow mgl(1-\cos\theta_{MAX}) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgl(1-\cos\theta_0)$

$1-\cos\theta_{MAX} = \frac{1}{2gl}v_0^2 + 1 - \cos\theta_0$

$\cos\theta_{MAX} = \cos\theta_0 - \frac{1}{2gl}v_0^2 \Rightarrow \boxed{\theta_{MAX} = \arccos\left[\cos\theta_0 - \frac{1}{2gl}v_0^2\right]}$

p3

Ex3 :



1)

$E_{pp} = -mgx + C$

on prend $E_{pp}=0$ en $x=0$

$\Rightarrow C=0$

$\boxed{E_{pp} = -mgx}$

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 + C$

on prend $E_{pe}=0$ en $x=\ell_0$

$\Rightarrow C=0$

$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2}$

Donc $E_p = E_{pp} + E_{pe} = -mgx + \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2$

2) $x_{éq}$ est tel que $\frac{dE_p}{dx} = 0$

$$\frac{dE_p}{dx} = -mg + k(x_{eq} - \ell_0) = 0$$

$$k x_{eq} - k\ell_0 = mg$$

$$x_{eq} = \frac{mg}{k} + \frac{k\ell_0}{k} = \boxed{\frac{mg}{k} + \ell_0 = x_{éq}}$$

$\frac{d^2E_p}{dx^2} = k > 0$ c'est donc une position d'équilibre stable.

3) $E_{p\,éq} = E_p(x = x_{éq}) = -mg\left(\frac{mg}{k} + \ell_0\right) + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$

A.N. : $E_{péq} = -0{,}100 \times 10 \times \left(\frac{0{,}100\times 10}{40} + \ell_0\right) + \frac{1}{2} \times 40 \times \left(\frac{0{,}100 \times 10}{40}\right)^2$

$= -0{,}025 - \ell_0 + 0{,}0125$

$\boxed{E_{peq} = -0{,}0125 - \ell_0}$

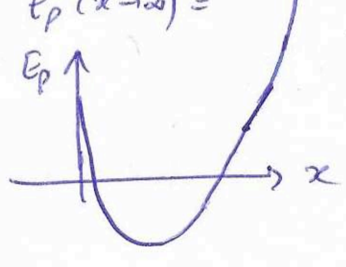
$E_p(x=0) = \frac{1}{2}k\ell_0^2 = E_{p_0}$

$E_p(x \to \infty) =$

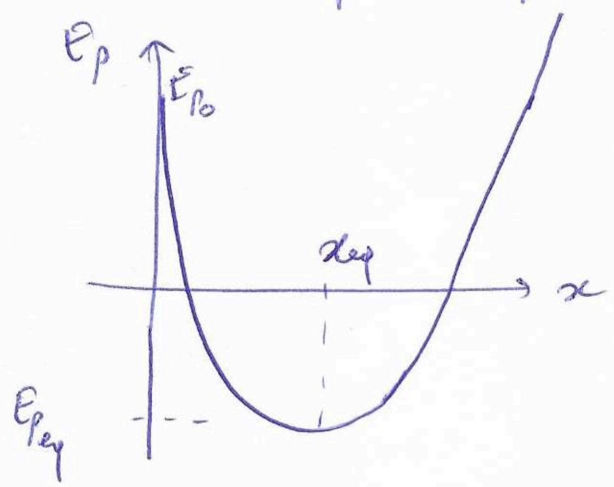
$\frac{dE_p}{dx} > 0 \Leftrightarrow x > x_{eq}$

$\frac{dE_p}{dx} < 0 \Leftrightarrow x < x_{eq}$

x	0		$x_{éq}$		∞
E_p	E_{p_0}	↘	$E_{p_{eq}}$	↗	



p4 $E_p(x)$ est une fonction parabolique



4) $E_m = E_c + E_p = \boxed{\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - l_0)^2 - m g x = E_m}$

5) ~~$E_{m_0} = \frac{1}{2} k (x_0 - l_0)^2 - m g x_0$~~ ~~avec $x_0 = x_{éq} + \delta$~~

~~$= \frac{mg}{k} + l_0 + \delta$~~

~~$= \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k} + \delta \right)^2 - mg \left(\frac{mg}{k} + l_0 \right)$~~

~~$= \frac{1}{2} k \left(\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \delta^2 + \frac{2mg}{k} \delta \right) - \frac{(mg)^2}{k} - mg l_0$~~

5) $\frac{dE_m}{dt} = 0$ (TEM)

$m \ddot{x} \dot{x} + k \dot{x} (x - l_0) - m g \dot{x} = 0$

$\dot{x} \neq 0 \Rightarrow m \ddot{x} + k (x - l_0) - mg = 0$

$m \ddot{x} + kx - kl_0 = mg$

$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = g + \frac{k l_0}{m}}$ on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

alors $\ddot{x} + \omega_0^2 x = g + \frac{k l_0}{m}$

6) $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \left(g + \frac{k l_0}{m} \right) \frac{1}{\omega_0^2}$

$\dot{x}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$\dot{x}_0 = 0 = B$

$x(0) = A \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{1} + \underbrace{\left(g + \frac{k l_0}{m} \right) \frac{m}{k}}_{\frac{mg}{k} + l_0 = x_{éq}}$ ~~$= l_0 + \frac{mg}{k} + \delta$~~

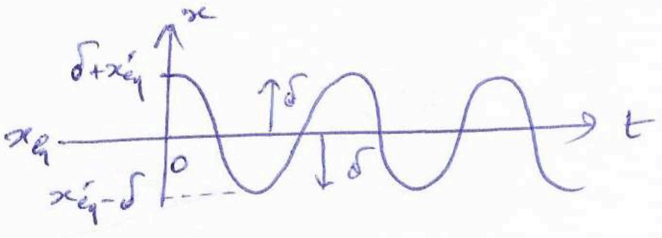
Donc $\boxed{x(t) = \delta \cos(\omega_0 t) + x_{éq}}$

Ex3 (suite)

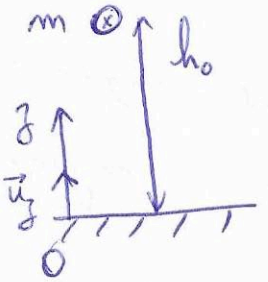
$\cancel{\quad}\ A \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{1} = \delta \Rightarrow A = \delta$

$$x(t) = \delta \cos(\omega_0 t) + \left(g + \frac{k l_0}{m}\right)\frac{1}{\omega_0^2} = \boxed{\delta \cos(\omega_0 t) + x_{éq}}$$

$$x_{éq} = \frac{mg}{k} + l_0$$



Ex4 : m



$V_i = 0$ m/s à $t = 0$

$\downarrow \vec{g}$

$V = V_0$ à t_0 (avant impact)

réf : terrestre (galiléen)
système : balle de masse m

1) forces : $\vec{P} = m\vec{g}$ conservative. $E_m = cte = E_m(t=0) = mgh_0$
$= E_m(t = t_0) = \frac{1}{2} m V_0^2$

2^e loi de Newton : $m\ddot{z} = -mg$

$\ddot{z} = -g$

$\dot{z} = -gt + V_i = -gt = V$

$z = -g\frac{t^2}{2} + h_0$

à $t = t_0$: $V_0 = -gt_0 \Rightarrow t_0 = \frac{V_0}{-g}$ et on exprime V_0 en fonction de h_0

ou bien : $z = 0$ pour $t = t_0$: $0 = -g\frac{t_0^2}{2} + h_0 \Rightarrow t_0^2 = \frac{2h_0}{g}$

$$\boxed{t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

2) Avant impact, seule force $\vec{P}$ (conservative) : $E_m = E_c + E_{pp} = cte = E_m(t=0)$
$= E_m(t_0)$

$$\boxed{mgh_0 = E_{c0}}$$

Puis après l'impact : $E'_{c0} = \alpha E_{c0} = \alpha m g h_0$

Or entre le 1er impact ($n = 0$) et le 2^e ($n = 1$) $E_m = cte = E'_{c0} = E_{pp_{MAX}} = mgh_1$

Donc $mgh_1 = \alpha m g h_0 \Rightarrow \boxed{h_1 = \alpha h_0}$

De même on aurait :

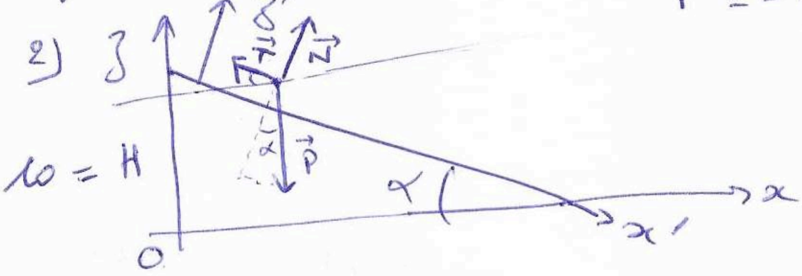
3) $h_2 = \alpha h_1 = \alpha^2 h_0$

On en déduit $\boxed{h_n = \alpha^n h_0}$

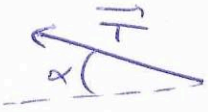
Ex5 : $V_A = 0\ m/s$

1) La force de frottement n'est pas conservative. Le mouvement n'est pas conservatif

$\vec{P} = -mg\vec{e_z}$

2) 

ZOOM :



$\vec{T} = -T\cos\alpha$

avec $T > 0$ et $T = fN$

2^{e} loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$

sur z' : $m\ddot{z}' = N - mg\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \boxed{N = mg\cos\alpha}$

Donc $\boxed{\vec{T} = -T\vec{e_{x'}} = -fmg\cos\alpha\,\vec{e_{x'}}}$

3) $\vec{T}$: force constante : non conservative

TEM : $\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}(\vec{T})$

$= \vec{T}\cdot\vec{AB}$

$\frac{1}{2}mV_B^2 + mgz_B - (\underbrace{\frac{1}{2}mV_A^2}_{=0} + mgz_A) = -fmg\cos\alpha\,\vec{e_{x'}}\cdot AB\,\vec{e_{x'}}$

$\frac{1}{2}mV_B^2 - mgH = -fmg\cos\alpha$

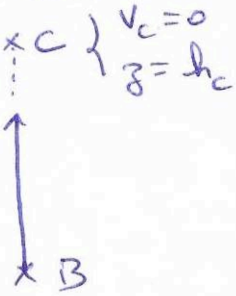
avec ~~AB...~~ $\sin\alpha = \frac{H}{AB} \Rightarrow AB = \frac{H}{\sin\alpha}$

alors $\frac{1}{2}V_B^2 = gH - fg\cos\alpha\cdot\frac{H}{\sin\alpha} = gH\left(1 - f\frac{1}{\tan\alpha}\right)$

$\boxed{V_B = \sqrt{2gH\left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right)}} = 12\ m/s$

$\boxed{E_c(B) = mgH - fmg\frac{H}{\tan\alpha}} = mgH\left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right)$

4] L'altitude sera maximale si $E_c = 0$ et E_{pp} max



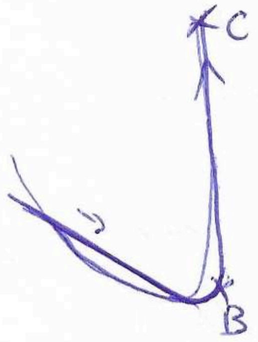
Or $E_c = \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2)$

Donc il faut $V_x = 0$ et $V_y = 0$

La trajectoire doit être verticale.

Dans ce cas : $E_m(B) = E_m(C)$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 + 0 = 0 + m g h_c$$



Alors $h_c = \frac{1}{2} \frac{V_B^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{2gH\left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right)}{g}$

$$h_c = H\left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right) = \boxed{\cancel{7,4\ m}}$$

~~18 m~~ 7,4 m

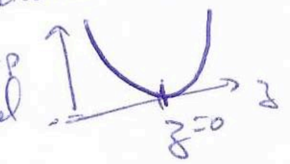
Ex 6 $E_p(z) = \frac{e}{2} \frac{V_0}{d^2} z^2$ $V_0 = 5,0\ V$ $d = 6,0\ mm$

$e = 1,6 \times 10^{-19}\ C$ $m = 9,1 \times 10^{-31}\ kg$

1] $\frac{dE_p}{dz} = \frac{e}{\cancel{2}} \frac{V_0}{d^2} \cancel{2} z = \frac{eV_0}{d^2} z = 0$ pour $z = 0$

En $z = 0$ $\frac{dE_p}{dz} = 0$: c'est une position d'équilibre.

$\frac{d^2E_p}{dz^2} = \frac{eV_0}{d^2} > 0$ alors $\frac{dE_p}{dz} \nearrow$ donc c'est une position d'équilibre stable.



L'électron est dans un puits de potentiel

$E_m = E_c + E_p = cte$ et $\frac{dE_m}{dt} = 0$

2] $E_m = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{e}{2} \frac{V_0}{d^2} z^2 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = m \ddot{z} \dot{z} + e \frac{V_0}{d^2} \dot{z} z = 0$

si $\dot{z} \neq 0$: $m \ddot{z} + e \frac{V_0}{d^2} z = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{eV_0}{md^2} z = 0}$

on pose $\omega_0^2 = \frac{eV_0}{md^2}$: pulsation propre

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \boxed{\sqrt{\frac{eV_0}{m}} \times \frac{1}{2\pi d} = f}$$

A.N. : $f = 2,5 \times 10^7\ Hz = 25\ MHz$

Ex7 : 1) Sans frottement, le mouvement est conservatif.
Alors $E_m = cte = E_c + E_{pp}$ (La réaction normale ne travaille pas).

$$\frac{1}{2} m V_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m V_1^2 + mgh'$$

Si m est "déposée" en A_0 cela veut dire que $V_0 = 0$.

Donc $mgh = \underbrace{\frac{1}{2} m V_1^2}_{>0} + mgh'$

$mg(h-h') > 0$ ce qui est faux par hypothèse

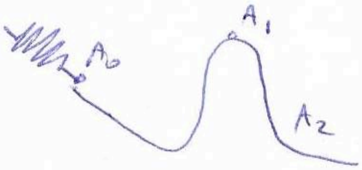
Donc la particule $\boxed{\text{ne peut pas}}$ parvenir en A_1.

2) a) $E_m = E_c + E_{pe} + E_{pp} = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 + mgh = \frac{1}{2} m v^2 + mgz$

Le mouvement est conservatif. Donc $E_m(A_0) = E_m(A_1) = E_m(A_2)$

Pour avoir une vitesse nulle en A_1 on aura donc (avec aussi $v = 0$ en A_0)

$$0 + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 + mgh = mgh'$$



Il faut $(l - l_0)^2 = \frac{2mg}{k}(h' - h)$

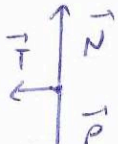
Soit $\boxed{l = \sqrt{\frac{2mg}{k}(h' - h)} + l_0}$

b) En A_2 : $\frac{1}{2} k (l - l_0)^2 + mgh = \frac{1}{2} m V_{A_2}^2$

$$V_{A_2}^2 = \frac{k}{m}(l - l_0)^2 + 2gh$$

$$\boxed{V_{A_2} = \sqrt{\frac{k}{m}(l - l_0)^2 + 2gh}}$$

c) force de frottement solide : $\|\vec{T}\| = \mu \|\vec{N}\|$ avec



2ᵉ loi de Newton : $\Rightarrow \vec{P} = -\vec{N} \Rightarrow \|\vec{N}\| = mg$

$\Rightarrow \|\vec{T}\| = \mu mg$

TEC : $\underbrace{\Delta E_c}_{E_c(A_3) - E_c(A_2)} = \underbrace{W_{AB}(\vec{P})}_{0} + \underbrace{W_{AB}(\vec{T})}_{0} + W_{AB}(\vec{T}) = -T \cdot AB = -T \cdot \underbrace{A_2 A_3}_{= L}$

$-\frac{1}{2} m V_{A_2}^2 = -T \cdot L \Rightarrow L = \frac{1}{2} \frac{m}{mg\mu}\left(\frac{k}{m}(l - l_0)^2 + 2gh\right)$

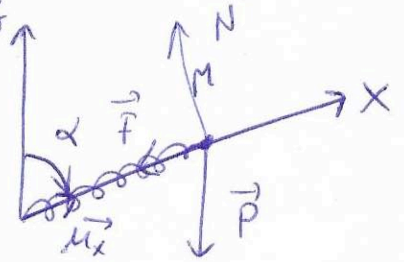
$$\boxed{L = \frac{k}{2mg\mu}(l - l_0)^2 + \frac{h}{\mu}}$$

Ex8

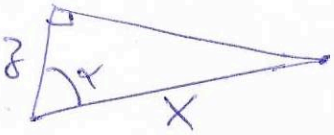
1) forces : poids $\vec{P} = m\vec{g}$

réaction normale $\vec{N}$

force de rappel $\vec{F} = -k(l-l_0)\,\vec{u}_x$



$$E_p = E_{p_e} + E_{pp} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + mgz + C$$



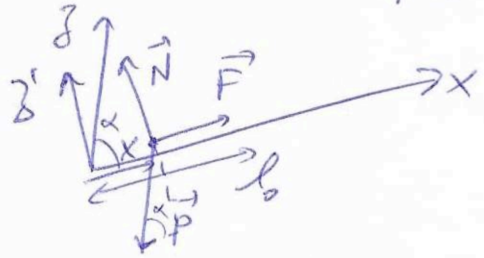
or $\cos\alpha = \dfrac{z}{X} \Rightarrow z = X\cdot\cos\alpha$

Donc $E_p = \frac{1}{2}k(X-l_0)^2 + mgX\cdot\cos\alpha + C$ on choisit $E_p=0$ quand $X=l_0$

$\Rightarrow C = -mg\,l_0\cos\alpha$

2) ~~$E_p = \frac{1}{2}kX^2 + kX\cdot l_0 + \frac{1}{2}kl_0^2 + mgX\cos\alpha$~~ $\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(X-l_0)^2 + mg(X-l_0)}$

Quand $X = l < l_0$: la force est vers les X croissants :



Si $X<l_0$:

$\|\vec{F}\| = k|l-l_0| = k|X-l_0|$
$= k(l_0-X)$

$\vec{P}\cdot\vec{u}_{z'} = N$

et $|\vec{P}\cdot\vec{u}_x| = |P\cdot\cos\alpha| = mg\cos\alpha < k\cdot l_0$

Il faut que quand $\|\vec{F}\|$ est maximale, la composante du poids $\vec{P}$ selon Ox soit plus petite que $\|\vec{F}\|_{max} = kl_0$ car sinon le poids pourrait retourner le ressort et faire passer M du côté $X<0$. Le modèle du ressort poserait problème.

- $E_p(X) = \frac{1}{2}k(X-l_0)^2 + mgX\cancel{l_0}\cos\alpha$

$$\frac{dE_p}{dX} = mg\cos\alpha + k(X-l_0)$$

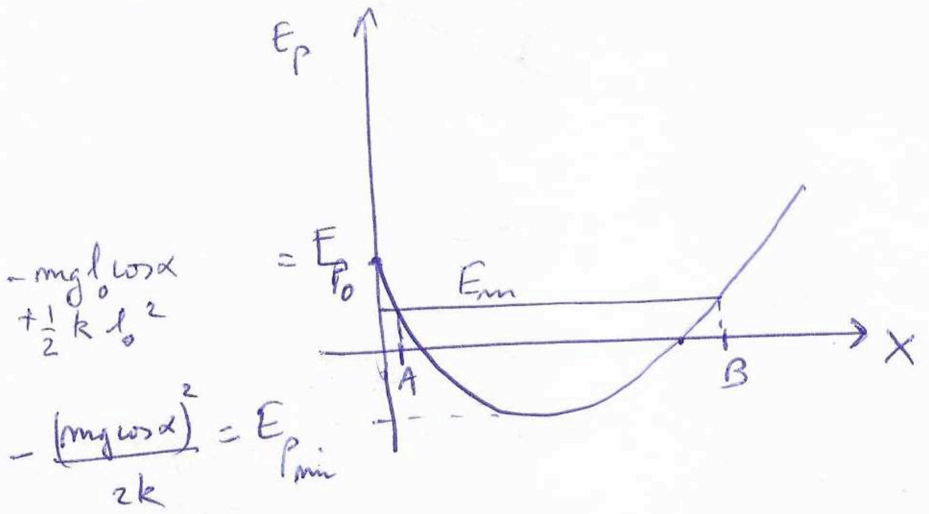
$$\frac{dE_p}{dX} = 0 \quad \text{en } X = l_0 - mg\frac{\cos\alpha}{k} > 0$$

$$\frac{d^2E_p}{dX^2} = k > 0$$ Donc E_p est un minimum en $l_0 - mg\dfrac{\cos\alpha}{k}$

$$E_{p_{min}} = \frac{1}{2}k\left(-mg\frac{\cos\alpha}{k}\right)^2 + mg\left(\cancel{l_0} - mg\frac{\cos\alpha}{k}\right)\cos\alpha$$
$$= -\frac{(mg\cos\alpha)^2}{2k}$$

p 10

Ce qui conduit au tracé :



$X(0) = l_0$ $\qquad E_m = E_c + E_p$

$\dot{X}(0) = V_0$ $\qquad E_m = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}k(X-l_0)^2 + mg(X-l_0)\cos\alpha$

Quand $\dot{X} = V = 0$: point d'arrêt

$E_m = cte = E_m(X=l_0) = \frac{1}{2}mV_0^2 \geq 0$

Les points extrêmes repérés A et B sont des points d'arrêts : $E_m = E_p(X)$

On a donc en A et B : $\frac{1}{2}mV_0^2 = mg(X_m - l_0)\cos\alpha + \frac{1}{2}k(X_m - l_0)^2$

L'E_m est bornée, le mouvement est donc périodique.
De plus, comme $E_p(X)$ est une parabole (polynôme en X de d°2) alors on s'attend à un oscillateur harmonique.

4) $\frac{dE_m}{dt} = 0 = m\ddot{X}\dot{X} + k\dot{X}(X-l_0) + mg\dot{X}\cos\alpha$

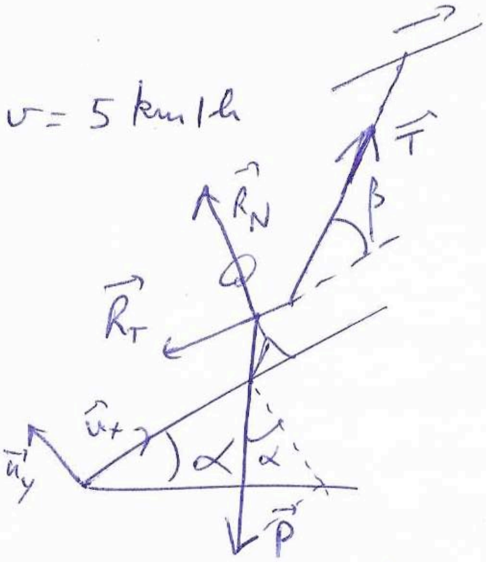
$\Rightarrow m\ddot{X} + k(X-l_0) + mg\cos\alpha = 0$

$\dot{X} \neq 0 \Rightarrow \quad \ddot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{k}{m}l_0 - \cancel{m}g\cos\alpha \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

$T_0 = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = T_0} \quad f = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Ex 9 : Regardons d'abord

Pour tirer un skieur de masse m à $v = 5$ km/h



pM

- Système : un skieur
  réf : terrestre supposé galiléen.

forces : poids $\vec{P}$
réaction $\vec{R} = \vec{R_N} + \vec{R_T}$
traction perche $\vec{T}$
avec $\|\vec{R_T}\| = f\|\vec{R_N}\|$

puissance totale $= \sum_i \mathcal{P}(\vec{F_i})$

$$\vec{P}\begin{pmatrix} -mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{T}\begin{pmatrix} T\cos\beta \\ T\sin\beta \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}(\vec{R_N}) = \vec{R_N}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{v} = v\cdot\vec{u_x}$

$\boxed{\mathcal{P}(\vec{R_N}) = 0}$ car $\vec{R_N} \perp \vec{v}$

$\mathcal{P}(\vec{R_T}) = \vec{R_T}\cdot\vec{v} = \begin{cases} -f\|\vec{R_N}\|\cdot v \\ = -R_T\cdot v \end{cases} < 0 \rightarrow$ il faut R_T ou R_N.

$\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\vec{v} = \boxed{-mg\sin\alpha\cdot v = \mathcal{P}(\vec{P})} < 0$

$\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T}\cdot\vec{v} = T\cdot\cos\beta\cdot v \rightarrow$ il faut $T > 0$

2e loi de Newton : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{R_T} + \vec{R_N} + \vec{T} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -mg\sin\alpha - R_T + T\cos\beta \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_N + T\sin\beta \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} T = (mg\sin\alpha + R_T)\frac{1}{\cos\beta} \\ R_N = mg\cos\alpha - T\sin\beta \end{cases}$

$R_T = fR_N = f(mg\cos\alpha - T\sin\beta)$

$R_T = fmg\cos\alpha - f(mg\sin\alpha + R_T)\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$

$R_T = fmg\cos\alpha - fmg\sin\alpha\tan\beta - f R_T\tan\beta$

$$R_T = \frac{1}{1+f\tan\beta}\left(fmg\cos\alpha - fmg\sin\alpha\tan\beta\right)$$

$$R_T = \frac{1}{1+f\tan\beta} \times fmg\left(\cos\alpha - \sin\alpha\tan\beta\right)$$

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{R_T}) = -\frac{fmg}{1+f\tan\beta}\left(\cos\alpha - \sin\alpha\tan\beta\right)\cdot v}$$

$\mathcal{P}(\vec{T})$ correspond à la puissance que doit fournir le moteur.

$\dfrac{dE_c}{dt} = 0$ en Régime permanent $\dfrac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}) = 0$

Donc

$$P_{moteur} = \left| \underbrace{\mathcal{P}(\vec{R_T})}_{\text{pertes liées aux frott}^t} + \underbrace{\mathcal{P}(\vec{P})}_{\text{liées au travail du poids...}} \right|$$

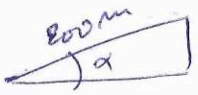
<u>A.N</u> : $\mathcal{P}(\vec{R_T}) = -\dfrac{0,1 \times 80 \times 10}{1 + 0,1 \tan 45} \left(\cos 14° - \sin 14° \tan 45 \right) 1,4$

$\simeq -74\ W$

<u>NB</u> : $m \simeq 80\ kg$ $\quad v = 5\ km/h = 1,4\ m.s^{-1}$

$g \simeq 10\ m.s^{-2}$

$\beta \simeq 45°$?



$\sin \alpha = \dfrac{5}{200} \Rightarrow \alpha = 14°$

$\mathcal{P}(\vec{P}) = -mg \sin \alpha\, v = -80 \times 10 \times \sin 14 \cdot 1,4 = -271\ W$

$P_{moteur} = 271 + 74 \simeq 345\ W$

Ca Il y a environ $\dfrac{200}{5} = 40$ skieurs. Donc $P_{moteur} = 40 \times 345$

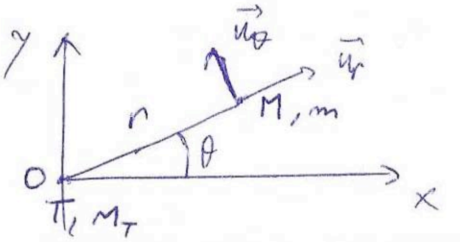
$= 13,8\ kW$

$$\boxed{P_{moteur} \simeq 14\ kW}$$

(Hypothèse : pas de pertes dans le moteur ...)

<u>Ex 10</u>

$\boxed{\text{Ex 10}}$



forces : $\vec{F}^{grav}_{T/M}$ et frott^t $\vec{f}$

1) réf géocentrique (considéré galiléen)

$\vec{OM} = r\vec{u_r}$
$\vec{V} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$
$\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r}$

2^e loi de Newton : $m\vec{a} = -G\frac{mM_T}{r^2}\vec{u_r}$

on néglige $\vec{f}$

on identifie $\begin{cases} -r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM_T}{r^2} \Rightarrow \frac{V^2}{r} = \frac{GM_T}{r^2} \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}} \\ r\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cte \end{cases}$

$$\boxed{\vec{V} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}\,\vec{u_\theta}}$$

$$\delta W(\vec{F}_{T/M}) = \vec{F}\cdot\vec{dl} = -G\frac{mM_T}{r^2}\vec{u_r}\cdot\left(r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + dr\,\vec{u_r}\right)$$

$$= -GmM_T\frac{dr}{r^2} = -d\left(-\frac{GmM_T}{r} + C\right)$$

$E_p = -\frac{GmM_T}{r} + C$ on prend $C = 0$ pour avoir $E_p \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{r} + -2G\frac{mM_T}{2r} = \boxed{-G\frac{mM_T}{2r} = E_m}$$

2) T.E.M :

$\Delta E_m = W_{AB}(\vec{f})$ est forcément résistant car $\vec{f}$ s'oppose au mouvement $W_{AB}(\vec{f}) < 0$

On doit donc avoir $\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{f}) < 0$

3) $E_m = -\frac{k}{r}$ Si $E_m \searrow$ alors $r \searrow$

Si $E_m = cte$ traj circulaire

Ici E_m $r\searrow$ trajectoire en spirale  satellit

4) $V = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$ avec $r \searrow$ $V \nearrow$

on peut imaginer qu'avec des frottement $v \searrow$ mais puisque le satellite "tombe" on peut comprendre que $v \nearrow$. En fait $E_p \searrow$ plus vite que E_c de sorte que $E_m \searrow$.

5) $\vec{f} = -\alpha m v \vec{v}$ $\alpha > 0$ $\alpha = 1,5 \times 10^{-15}\ m^{-1}$

a) $$\Delta E_m = W(\vec{f}) = \int_{\text{un tour}} \vec{f} \cdot \vec{dl} = \int_{1\,\text{tour}} \underset{\perp}{-\alpha m v \vec{v}} \cdot (r\,d\theta\, \vec{u_\theta} + \underbrace{dr\, \vec{u_r}}_{\perp \vec{v}})$$

$\vec{v} = v\vec{u_\theta}$

$$= -\alpha m v^2 r \int_0^{2\pi} d\theta = -\alpha m v^2 r\, 2\pi$$

avec $v^2 = \frac{GM_T}{r}$ on obtient :

$$\Delta E_m = -\alpha m \frac{GM_T}{r} \cdot r\, 2\pi$$

$$\boxed{\Delta E_m = -\alpha m G M_T \cdot 2\pi}$$

b) $E_m = -\frac{G m M_T}{2r}$

$$\Delta E_m = E_m^f - E_m^i = -\frac{G m M_T}{2(r - \Delta r)} + G\frac{m M_T}{2r} = -\alpha m G M_T 2\pi$$

$$= -\frac{G m M_T}{2r} \underbrace{\left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{\Delta r}{r}}\right)}_{-1 + \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)} = -\frac{G m M_T}{2r} \cdot \frac{\Delta r}{r}$$

Donc $+\frac{\cancel{G}\cancel{m}\cancel{M_T}}{2} \cdot \frac{\Delta r}{r^2} = +\alpha \cancel{m}\, 2\pi \cancel{G}\cancel{M_T}$

$$\boxed{\Delta r = \alpha 4\pi r^2}$$ A.N. $\Delta r = 82\ cm$

$r = R_T + z$ avec $z = 200\ km$ et $R_T = 6380\ km$ $\frac{\Delta r}{r} \ll 1$ OK

5] c] $82\,cm \times N = 10\,km$

N : nombre de tours

$$N = \frac{10\,km}{82\,cm} = \frac{10 \times 10^3\,m}{0{,}82\,m} = 1{,}2 \times 10^4 \text{ tours}$$

Or $$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{G m_T}} \sqrt{r} = 5{,}3 \times 10^3\,s$$

avec $r = R_T + z$

$m_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,kg$

durée totale $\Delta t = N \times T = 6{,}5 \times 10^7\,s$

$= 752\,j$