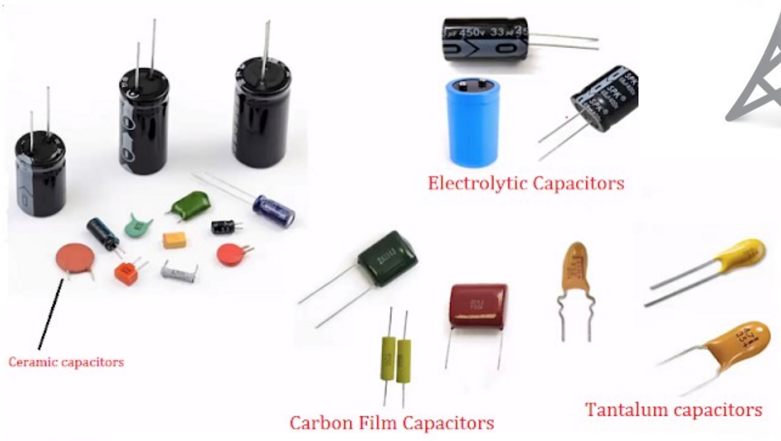
Thème 1 : ondes et signaux



S3. Circuits électriques du premier ordre

1.4. Circuit linéaire du premier ordre	thème 1
Régime libre, réponse à un échelon.	Distinguer sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon. Utiliser un modèle équivalent aux dipôles pour déterminer les grandeurs électriques en régime permanent. Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. Établir la relation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Déterminer un ordre de grandeur de la durée d'un régime transitoire. Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux résultats d'un modèle. *Capacité numérique : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.*
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

Un circuit linéaire du premier ordre est un circuit dans lequel les grandeurs électriques satisfont une équation différentielle linéaire du premier ordre. (Il ne contient généralement pas simultanément un condensateur et une bobine).

I MODELES EQUIVALENTS EN REGIME PERMANENT

En régime permanent, les grandeurs électriques du circuit sont **indépendantes du temps**. Leur dérivée temporelle est donc nulle: $\frac{du}{dt} = 0$ et $\frac{di}{dt} = 0$.

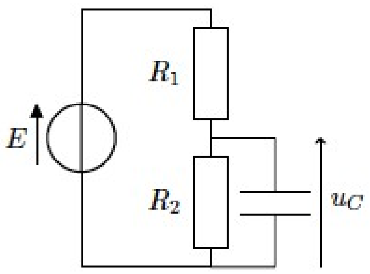
I-1) Le condensateur

La relation entre la tension et l'intensité est : ……..

En régime permanent, ……….

Aucun courant ne traverse le condensateur, il se comporte comme un **interrupteur ouvert**.

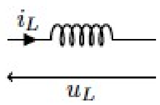
Application : *On cherche à calculer la tension u_C aux bornes du condensateur en régime permanent. :*



En régime permanent,ce circuit est équivalent à :

On en déduit l'expression de u_C : …………………...

I-2) La bobine

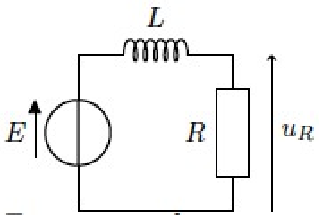


La relation entre la tension et l'intensité est : ……….

En régime permanent, ……….

La tension aux bornes de la bobine est nulle, elle se comporte comme un **interrupteur fermé** (ou comme un fil).

Application : *On cherche à déterminer la tension u_R aux bornes de la résistance R dans le circuit suivant en régime permanent.*



En régime permanent, ce circuit est équivalent à :

On en déduit l'expression de u_R : …………………...

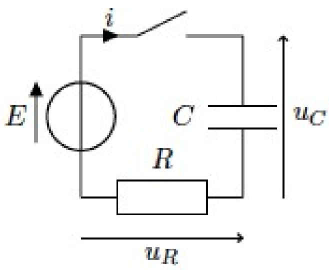
II PROPRIETES DE CONTINUITE

II-1) Aux bornes d'un condensateur

La tension aux bornes d'un condensateur est continue.

Application : Dans le circuit suivant, l'interrupteur est initialement ouvert et le condensateur est déchargé (u_C = 0). On ferme l'interrupteur à t = 0, déterminer la tension $u_R(0^+)$ et l'intensité $i(0^+)$ juste après avoir fermé l'interrupteur.

……………….

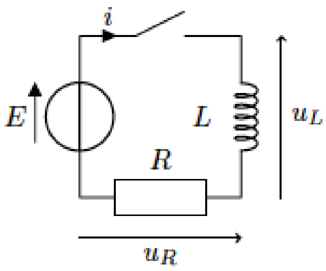


II-2) Aux bornes d'une bobine

L'intensité du courant qui traverse une bobine est continue.

Application : *Dans le circuit suivant, l'interrupteur est initialement ouvert. On le ferme à t = 0, déterminer la tension $u_R(0^+)$ et l'intensité $i(0^+)$ juste après avoir fermé l'interrupteur.*

……………….

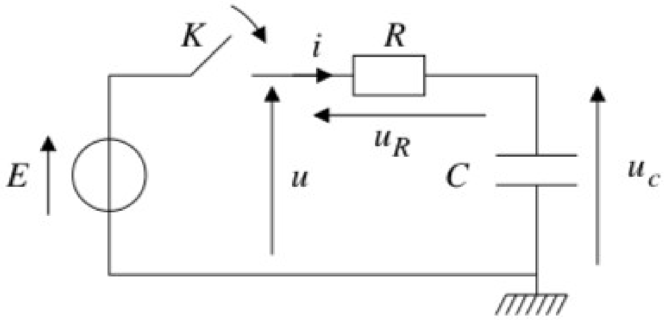


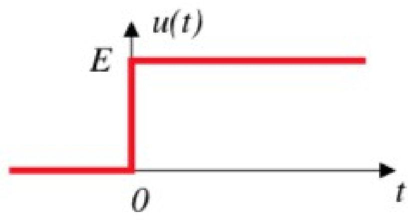
III REPONSE D'UN CIRCUIT RC SERIE A UN ECHELON DE TENSION

On s'intéresse à la réponse d'une association série {conducteur ohmique, condensateur} que l'on soumet « brusquement » à une tension E constante.

Le condensateur est initialement déchargé, et on ferme l'interrupteur à t = 0.

III-1) Montage

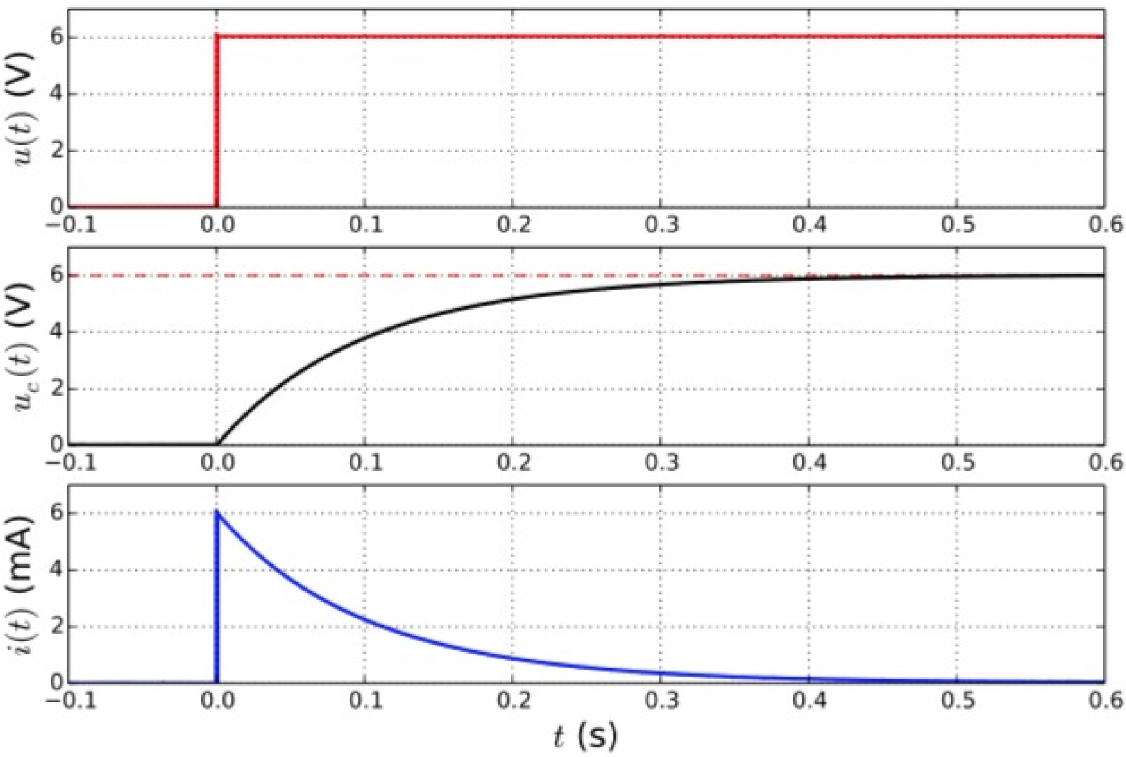




Echelon de tension

III-2) Résultats expérimentaux

On réalise une première expérience avec R = 1,0 kΩ, C = 100 μF et E = 6,0 V.



La tension u_C est continue en t = 0, le condensateur se charge, la tension augmente jusqu'à atteindre une valeur constante, égale à E.

L'intensité du courant i est discontinue en t = 0 ; partant d'une valeur maximale en $t = 0^+$, l'intensité décroît pour s'annuler une fois le condensateur chargé.

On distingue, **le régime permanent**, une fois que les grandeurs ne dépendent plus du temps (ici pour t > 0,5 s) et le **régime transitoire** entre l'instant initial et le régime permanent (transition).

III-3) Équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$

On s'intéresse à l'évolution du circuit, une fois l'interrupteur fermé, ∀ t > 0.

Loi d'additivité des tensions : $u_G = E = u_R + u_C$

Caractéristiques des dipôles : $u_R = Ri$ et $i = C \dfrac{du_C}{dt}$

On en déduit : $E = Ri + u_C = RC \dfrac{du_C}{dt} + u_C$ $\quad \forall t > 0 \quad RC \dfrac{du_C}{dt} + u_C = E$

https://youtu.be/P7gpwk3Yza8

III-4) Analyse de l'équation différentielle

L'équation différentielle fait apparaître $\tau = RC$, la **constante de temps du circuit** (en divisant tous les terme par $\tau = RC$ de sorte d'avoir le facteur 1 devant la dérivée du_C/dt) .

Forme canonique : $$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

dérivée première second membre

Une fois le régime permanent atteint, $du_C/dt = 0$, on conclut que $u_C = E$ en régime permanent (condensateur chargé).

Pour $t = 0^+$, le condensateur est déchargé ($u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$), i est maximale et vaut $i(0^+) = E/R$. Une fois le régime permanent atteint, l'intensité s'annule $i(\infty) = 0$ et $u_C(\infty) = E$.

III-5) Résolution de l'équation différentielle

Le condensateur est initialement déchargé $u_c(0^-) = 0$, la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur assure que : $\mathbf{u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0}$.

Le problème à résoudre est donc le suivant : on cherche u_C qui vérifie :

$$\forall t>0, \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{et} \quad u_C(t = 0) = 0$$

La solution générale est de la forme : $u_C(t) = E + A e^{-t/\tau}$

E est la solution particulière, elle correspond au régime permanent atteint et donc $\dfrac{du_C}{dt} = 0$.

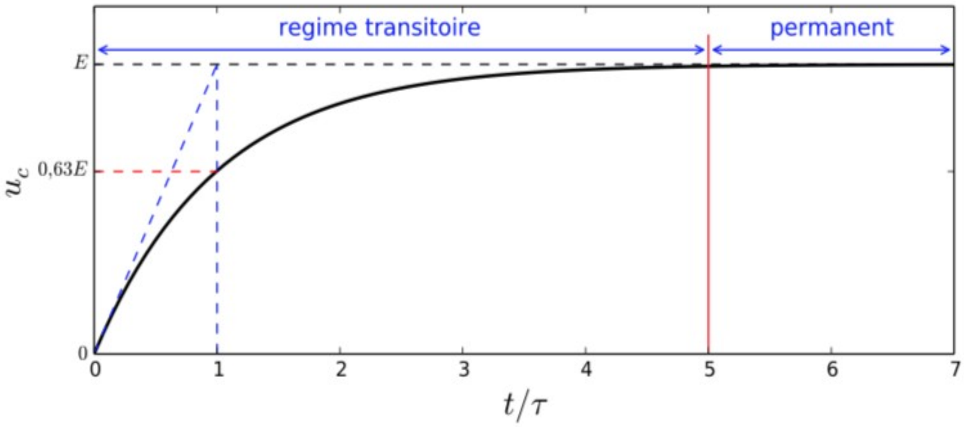
Le terme $A e^{-t/\tau}$ correspond à la solution de l'équation homogène : $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{\tau} = 0$.

La condition initiale impose (Cauchy) : $u_C(0) = 0 = E + A \Rightarrow A = -E$, on en déduit :

$$\forall t > 0, \; u_C(t) = E\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

III-6) Tracé et constante de temps

La courbe théorique ci-dessous représente l'évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction de la variable t/τ.



Pour t = 5τ, $u_C(5\tau) = E(1-e^{-5})$ =0,99 E, on peut considérer que la tension u_c a atteint sa valeur finale.

Le régime permanent est atteint au bout d'une durée de l'ordre de 5τ (E atteint à 99%).

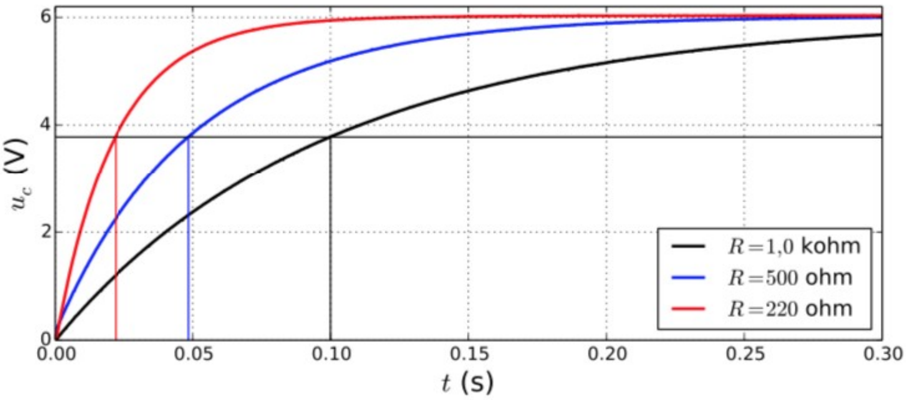
La constante de temps peut être déterminée graphiquement de deux manières :
⋆ La tension u_c atteint 63% de sa valeur finale pour t = τ ; en effet $(1-e^{-1})$ = 0, 63
⋆ La tangente à l'origine coupe l'asymptote y = E pour t = τ.

En effet, la dérivée à t = 0 vaut : $u'_C(0^+) = \dfrac{E}{\tau}$, la tangente à l'origine a donc pour équation : $y(t) = \dfrac{E}{\tau}.t$ et pour t = τ, on trouve y(τ) = E.

En effet, la dérivée à t = 0 vaut : $u'_C(0^+) = \dfrac{E}{\tau}$, la tangente à l'origine a donc pour équation : $y(t) = \dfrac{E}{\tau}.t$ et pour t = τ, on trouve y(τ) = E.

https://youtu.be/OWBXP7_MO-I

Les courbes ci-contre, présentent l'influence de la constante de temps sur la charge du condensateur. Pour les expériences la capacité est fixée à C = 100 µF, et R prend trois valeurs distinctes.



III-7) Intensité du courant au cours de la charge

L'intensité du courant est nulle pour t < 0 (circuit ouvert).

Pour t > 0, l'intensité a pour expression : i(t) = $\frac{E}{R} e^{\frac{-t}{\tau}}$

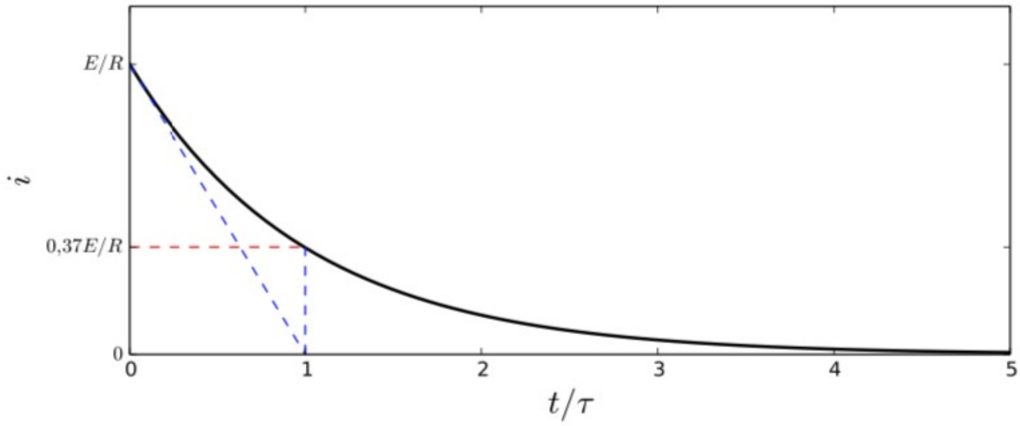
Cette relation peut être obtenue de deux manières :

1- en utilisant la loi des mailles : R i(t) + u_c(t) = E d'où i(t) = (E – E(1 - $e^{\frac{-t}{\tau}}$)) /R = $\frac{E}{R} e^{\frac{-t}{\tau}}$

2- en utilisant la caractéristique du condensateur : i(t) = C $\frac{du_C}{dt}$ = C $\frac{d}{dt}$ (E(1 - $e^{\frac{-t}{\tau}}$))

i(t) = $C\frac{dE}{dt}$ + C $\frac{d}{dt}\left(-E\,e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$ = - C.($\frac{-E}{RC}$. $e^{-t/\tau}$)= $\frac{E}{R} e^{\frac{-t}{\tau}}$

dérivée nulle car E est constante.



III.8) Bilan énergétique

Energie fournie par le générateur : $E_G = \int_0^{\infty} E i(t)\,dt$

Calcul :

Energie stockée dans le condensateur : $E_C = \frac{CE^2}{2}$

Energie dissipée par effet Joule: $E_J = \int_0^{\infty} R i^2\,dt$

Calcul :

On en déduit: $E_g = E_c + E_J$.

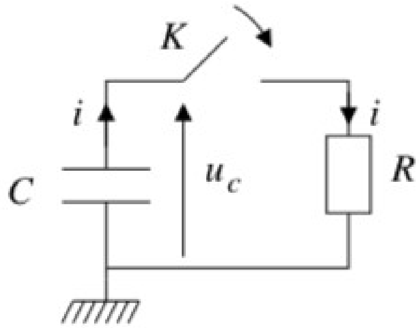
L'énergie fournie par le générateur est, pour moitié, stockée sous forme d'énergie électrostatique dans le condensateur et, pour moitié, dissipée par effet Joule.

Le bilan énergétique peut être obtenu en multipliant chaque terme de la loi des mailles par l'intensité du courant :

$E \times i = (R\,i + u_C) \times i \Rightarrow E\,i = R\,i^2 + u_C \times i =$ ……...

IV DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

On s'intéresse à la décharge d'un condensateur dans une résistance. Le condensateur est initialement chargé sous une tension E. À l'instant initial, on ferme l'interrupteur.



IV-1) Équation différentielle vérifiée par u_c (t)

Compte tenu des conventions d'orientation, les caractéristiques s'écrivent : $i = - C\, du_C/dt$ et $u_C = Ri$

$\frac{u_C}{R} = -C\frac{du_C}{dt}$ $\quad \forall t>0, \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0$

IV-2) Résolution de l'équation différentielle

En l'absence de second membre, la solution se limite à la solution homogène :

$$\forall\, t > 0,\ u_C(t) = Ae^{-t/\tau}$$

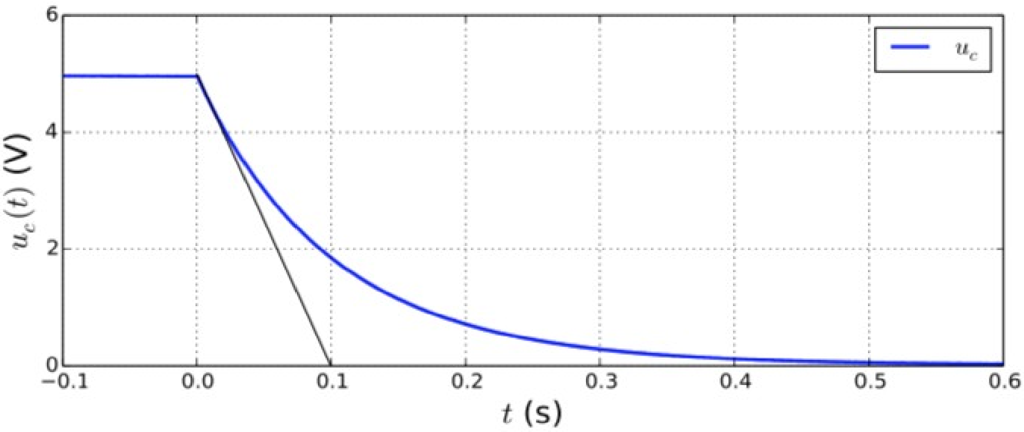
La continuité de la tension aux bornes du condensateur assure que $u_c(0^+) = u_c(0^-) = E$, on en déduit

A = E et finalement :

$$\forall\, t \geq 0,\quad u_C(t) = E\, e^{-t/\tau}$$

IV-3) Résultats expérimentaux

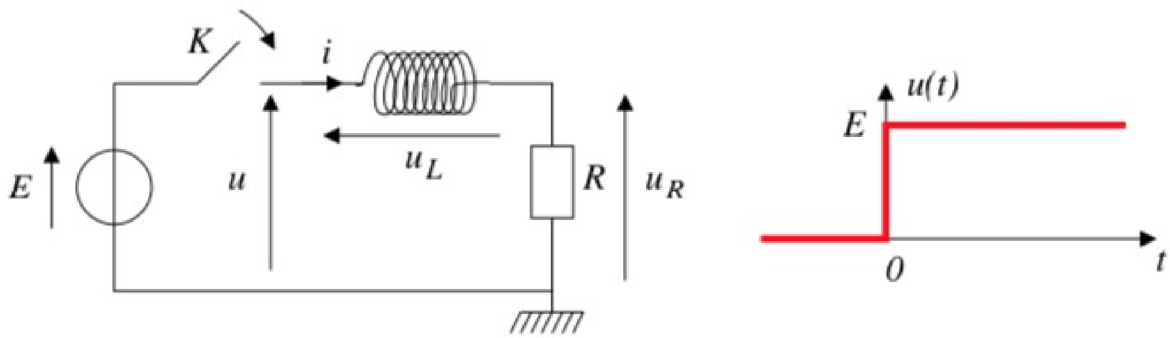
L'expérience a été réalisée avec C = 100 μF et R = 1, 0 kΩ. On observe la décharge du condensateur en une durée caractéristique τ = 0, 1 s.



V REPONSE D'UN CIRCUIT RL SERIE A UN ECHELON DE TENSION

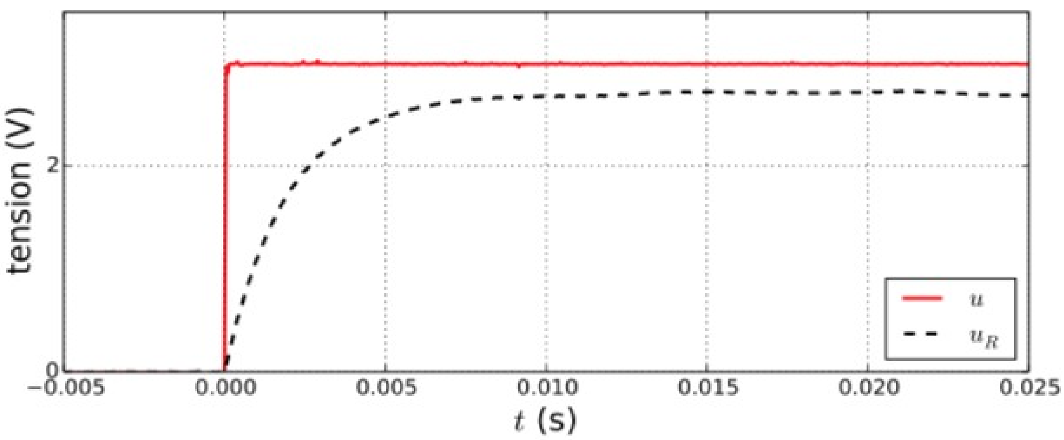
On s'intéresse à la réponse d'une association série {conducteur ohmique, bobine} que l'on soumet brusquement à une tension E constante. On ferme l'interrupteur à t = 0.

V-1) Montage



V-2) Résultats expérimentaux

On réalise une première expérience avec R = 100 Ω, L = 0,20 H et E = 3,0 V.



→ Pour un conducteur ohmique i = u_R/R, la mesure de la tension est une image directe de l'intensité du courant parcourant la résistance.

→ L'intensité i est continue en t = 0 ; en présence d'une bobine, l'intensité s'installe progressivement jusqu'à atteindre une valeur limite en régime permanent.

V-3) Équation différentielle vérifiée par i(t)

On s'intéresse à l'évolution du circuit, une fois l'interrupteur fermé, ∀t > 0.

→ Loi d'additivité des tensions : u = E = u_L + u_R

→ Caractéristiques des dipôles : u_R = Ri et u_L = $L\frac{di}{dt}$

En combinant ces trois équation, on obtient **l'équation différentielle : E = Ri + Ldi/dt,**

L'équation différentielle fait apparaître τ = L/R, la **constante de temps du circuit** (en divisant tous les terme par τ de sorte d'avoir le facteur 1 devant la dérivée du_C/dt) .

$$\text{Forme canonique : } \frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = \frac{E}{L}$$

L'équation différentielle se met sous la forme: $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$

dérivée première second membre

On pose τ = L/R **(constante de temps du circuit).**

V-4) Analyse de l'équation différentielle

La bobine tend à retarder l'installation du courant.

Une fois le régime permanent atteint, di/dt = 0; on conclut que i = E/R en régime permanent.

V-5) Résolution de l'équation différentielle

Tant que l'interrupteur est ouvert, l'intensité du courant est nulle $i(0^-) = 0$, la continuité de l'intensité du courant parcourant une bobine assure que : $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

Le problème à résoudre est donc le suivant : on cherche i qui vérifie :

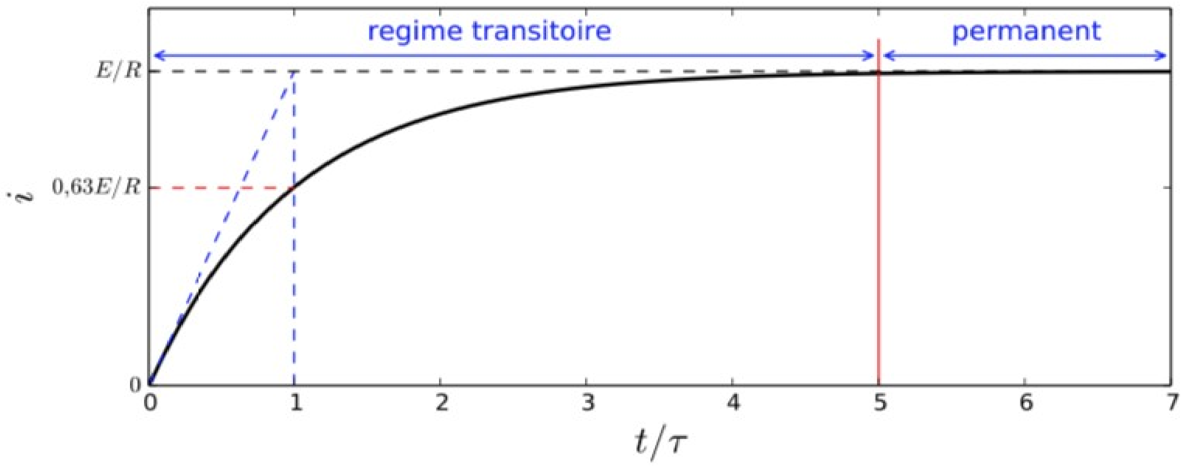
∀t>0, di/dt + 1/τ.i = E/L et i(t =0) = 0 **τ = L/R**

La solution générale est de la forme : $i(t) = E/R + A\ e^{\frac{-t}{\tau}}$

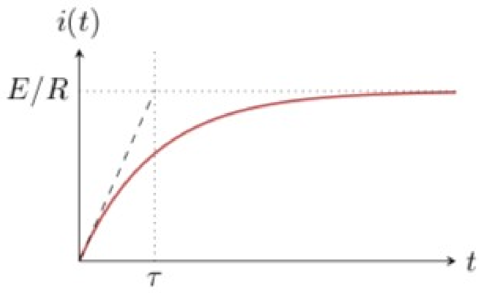
La condition initiale impose : i(0) = 0 = E/R + A ⇒ A = −E/R, on en déduit :

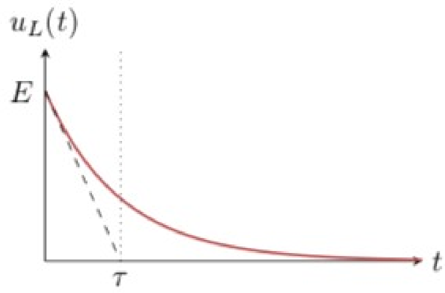
$$\forall t>0,\ i(t) = \frac{E}{R}\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

V-6) Tracé



La courbe ci-dessus représente l'évolution de l'intensité dans le circuit en fonction de t/τ.





Graphes i en fonction du temps et u_L en fonction du temps.

V-7) Bilan énergétique

Pour obtenir le bilan de puissance, on multiplie la loi des mailles : $E = Ri + u_L$ par i ; ce qui donne :

$Ei = Ri^2 + u_L \cdot i = Ri^2 + \frac{Li \cdot di}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

Puissance fournie par le générateur = puissance dissipée par effet Joule + puissance reçue par la bobine

PLAN

REGIME TRANSITOIRE - METHODE

1. Etablir l’équation différentielle vérifiée par la grandeur étudiée : pour cela, utiliser les lois des mailles et des nœuds puis les relations courant-tension des différents dipôles afin de se ramener à une seule inconnue. (certains problèmes nécessitent de dériver ces équations).

2. Résoudre l’équation différentielle : $s(t) = s_H(t) + s_P(t)$

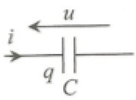
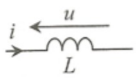
   - $s_H(t)$: solution générale de l’équation homogène (équation sans second membre) : sa forme correspond au régime libre du circuit (absence de sources = absence de 2nd membre).

   - $s_P(t)$: solution particulière de l’équation avec second membre. En régime continu, il s’agit d’une constante : elle correspond au régime permanent atteint, on peut donc la déterminer en remplaçant dans le circuit les condensateurs par des circuits ouverts et les bobines par des fils.

Tant que $|s_H| \approx |s_P|$, on est dans le domaine du régime transitoire, lorsque $|s_H| << |s_P|$, le régime permanent est établi.

3. On détermine la constante d’intégration à l’aide¨ des CI. Ces conditions initiales se déterminent à partir des continuités des tensions aux bornes des condensateurs et des intensités des courants traversant les bobines puis avec les lois de Kirchhoff si nécessaire.¨

Tableau récapitulatif

	Condensateur	Bobine
		
Relation fondamentale		
Comportement en régime continu		
Energie reçue (entre deux instants)		
Grandeur continue		
Association série		
Association parallèles		