

Les équations différentielles en physique

Une équation différentielle, est une équation liant les différentes dérivées d'une fonction y . En physique, on s'intéressera tout particulièrement aux dérivées temporelles (dy/dt).

Une équation différentielle est dite du « premier ordre » si elle ne contient que la dérivée première de y (y'). Elle est dite du « second ordre » si elle contient la dérivée seconde de y (y''), et ainsi de suite.

Une équation différentielle est dite à coefficients constants si les coefficients devant y et ses dérivées sont constants (indépendants du temps).

Une équation différentielle linéaire ne fait intervenir y et ses dérivées qu'à la puissance un. De cette façon, si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont deux solutions, alors $y_1(t)+y_2(t)$ est aussi solution. En physique, on ne s'intéressera qu'à des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Equation du premier ordre.

La forme canonique (forme « standard » utilisée en physique) d'une équation différentielle du premier ordre est :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{B}{\tau} \quad (\text{De la forme } y' + ay = b \text{ en maths})$$

avec τ , un temps caractéristique, et B/τ , un second membre quelconque.

Résolution :

Pour trouver la solution $y(t)$ d'une telle équation, il faut procéder en deux étapes.

- **On résout l'équation homogène**, c'est l'équation sans second membre : $\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = 0$.

Les solutions sont de la forme $y_H(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ où A est une constante que l'on déterminera avec les conditions initiales.

- **On cherche une solution particulière** de l'équation avec second membre.

La solution particulière a la même forme que le second membre. Ainsi, si B est une constante, alors on cherche une solution particulière y_p constante : $y_p = B$ convient.

B correspond au régime permanent ou à la position d'équilibre.

- **La solution générale** de l'équation différentielle est la somme est alors :

$$y(t) = y_H(t) + y_p = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + B.$$

- **On détermine A** en utilisant les conditions initiales : $y(t=0) = A + B$.

Equations différentielles du deuxième ordre

La forme canonique d'une équation différentielle du deuxième ordre est :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_{eq} \quad (\text{De la forme } ay'' + by' + cy = d \text{ en maths})$$

avec Q , le facteur de qualité, ω_0 la pulsation propre et y_{eq} , un second membre quelconque.

Résolution de l'équation homogène sans second membre :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$$

On définit l'**équation caractéristique** associée à l'équation différentielle par :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

On cherche les solutions r associées à cette équation du second degré. Elles dépendent du signe du

discriminant : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) = b^2 - 4ac$.

- Si Δ est positif, ou $Q < \frac{1}{2}$ (**régime apériodique**) on a deux racines réelles distinctes :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont alors :

$$y(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \text{ avec } A \text{ et } B \text{ des constantes.}$$

- Si Δ est nul, ou $Q = \frac{1}{2}$ (**régime critique**) on a une racine double

$$r = \frac{-b}{2a} = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\frac{1}{\tau}.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont alors :

$$y(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) [A + Bt] \text{ avec } A \text{ et } B \text{ des constantes.}$$

- Si Δ est négatif, ou $Q > \frac{1}{2}$ (**régime pseudo-périodique**) on a deux racines imaginaires distinctes. En notant j le nombre complexe,

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

On note : $r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$ où $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ est la pseudo-pulsation des oscillations.

Les solutions de l'équation différentielle sont alors :

$$y(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \text{ ou } y(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) C \cos(\omega t + \varphi)$$

avec A , B , C et φ des constantes.

Dans le cours de physique une équation est particulièrement importante :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$$

Il faut connaître ses solutions : $y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Résolution de l'équation avec second membre :

En plus de la solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre. Dans le cas d'un second membre constant, la solution particulière correspond à y_{eq} .

La solution particulière correspond au régime permanent ou à la position d'équilibre.
