Circuit RLC série

et

oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.

Oscillateur amorti **Exemples du mouvement amorti par frottement visqueux d'une masse accrochée à un ressort linéaire sans masse, et du circuit RLC.**	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique la relation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction du facteur de qualité. Établir l'expression de la réponse dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité. **Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.** **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.**
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser le bilan énergétique du circuit RLC série.

I APPROCHE EXPERIMENTALE

I-1) Système mécanique

Expériences

https://youtu.be/8YKHSJ_yq20

https://youtu.be/o67zf8GzZS0

https://youtu.be/u13rckeBXt0

Si on modifie la viscosité du liquide dans lequel la masse oscille, on observe plusieurs types de régimes :

Si les frottements sont faibles : on observe plusieurs oscillations de la masse, avec tout de même une amplitude qui décroit avec le temps. On parle de **régime pseudo-périodique** ;

si on augmente les frottements, le nombre d'oscillations diminue ;

si les frottements sont plus élevés : la masse s'arrête dès qu'elle passe pour la première fois à la position d'équilibre. On parle de **régime apériodique**.

Il s'agit de l'oscillateur vu précédemment (masse + ressort) auquel on ajoute les frottements fluides.Un frottement fluide est une force de frottement qui s'exerce sur un objet se déplaçant dans un fluide (liquide ou gazeux).

Ces frottements sont modélisés par une force proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{f} = -h \ \vec{v} \ ,$$

où h coefficient de frottement, s'exprime en $kg.s^{-1}$ et dépend de la forme de l'objet, de son état de surface et du fluide exerçant les frottements.

Si on prend une valeur de l'écartement initial donnée, et une valeur de la constante de raideur k, alors lorsque l'on augmente la valeur de h, le système passe du régime pseudo-périodique au régime apériodique (le régime à la limite entre les deux est le **régime critique**).

Dans les trois cas, on aboutit au même régime permanent : contrairement à l'oscillateur harmonique, il y a ici comme pour les systèmes du premier ordre **un régime transitoire** qui amène à un régime permanent.

Influence des paramètres

La masse m et la raideur du ressort k changent la valeur de la période des oscillations en régime pseudo- périodique (la **pseudo-période**).

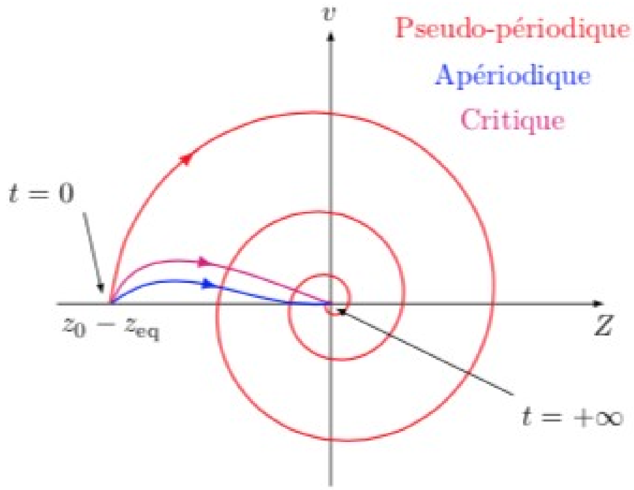
La masse m, a aussi une influence sur la durée du régime transitoire . Le coefficient h influe aussi sur la durée du transitoire : plus il est grand plus il est important.

I-2) Portrait de phase

On peut tracer les portraits de phase pour différents régimes (de très peu amorti à très amorti).

Pour les régimes pseudo-périodiques, on se retrouve un peu plus près du centre de l'ellipse qu'au départ à chaque tour : petit à petit, on se rapproche du centre (centre attractif) avec une courbe en « escargot ». En régimes apériodiques, il n'y a plus d'oscillation, à la limite, c'est le régime critique.

Le portrait de phase tracé ici est celui de $v = \frac{dz}{dt}$ et $Z = z(t) - z_{eq}$. On trace en fonction de cette variable pour centrer le portrait de phase autour de 0.



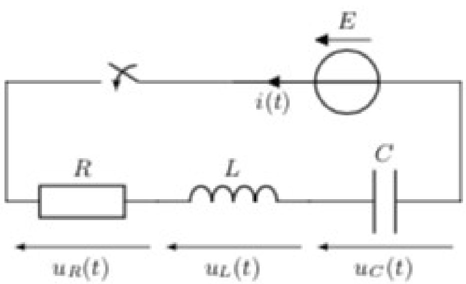
Visualisation des différentes solutions dans le portrait de phases avec $Z = z(t) - z_{eq}$.

Les courbes sont cette fois ouvertes et partent de la condition initiale vers le point d'équilibre ($v = 0$, $Z = 0$). Cette convergence vers le point d'équilibre traduit la dissipation de l'énergie.

En ce qui concerne le régime pseudo-périodique, un tour dans le portrait de phase correspond à une oscillation. En comptant le nombre de tour, on obtient N et en utilisant $N \approx 1{,}5\ Q$, on estime Q. Sur la figure ci-dessus, on a $Q \approx 2$.

I.3) Electricité : circuit RLC

On étudie un circuit composé d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L et d'une résistance R en série branchés sur **une alimentation E** .



On suppose que dans la figure ci-contre, à $t < 0$, le condensateur est déchargé.

Conditions initiales

$i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 0$. K ouvert et continuité du courant (bobine).

$u_C(0^-) = u_C(0^+) = u_C(0) = 0$. Condensateur initialement déchargé et continuité de la tension aux bornes du condensateur.

Loi des mailles : $u_L + u_C + u_R = E$ d'où à $t = 0$, $u_L(0) + u_C(0) + u_R(0) = E$

d'où $u_L(0) = E - u_C(0) - u_R(0) = E - 0 - R.0 = E$ soit $L\frac{di(0)}{dt} = E$ ou encore $\frac{di(0)}{dt} = \frac{E}{L}$

Mise en équation

$$u_L + u_C + u_R = E \text{ (Loi des mailles)}$$

Equation différentielle en fonction de u_C

Equation différentielle en fonction de i

Discussion

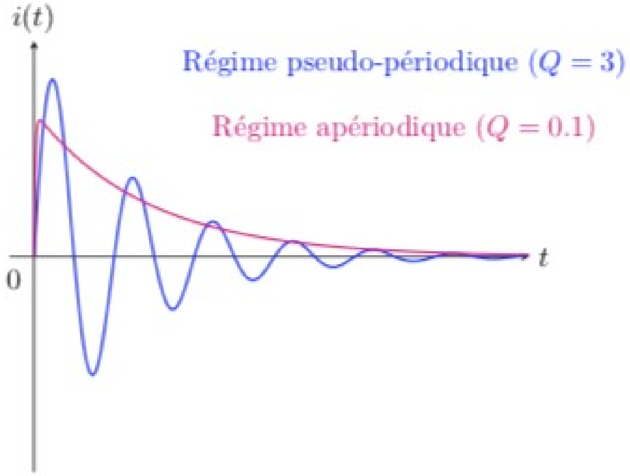
Observations selon la valeur de Q :

pour Q > 1/2, le régime est pseudo-périodique et

pour Q < 1/2, le régime est apériodique.

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$



On peut donc faire varier les paramètres R, L et C pour observer les différents régimes: la résistance est l'analogue du coefficient h pour les frottements fluides.

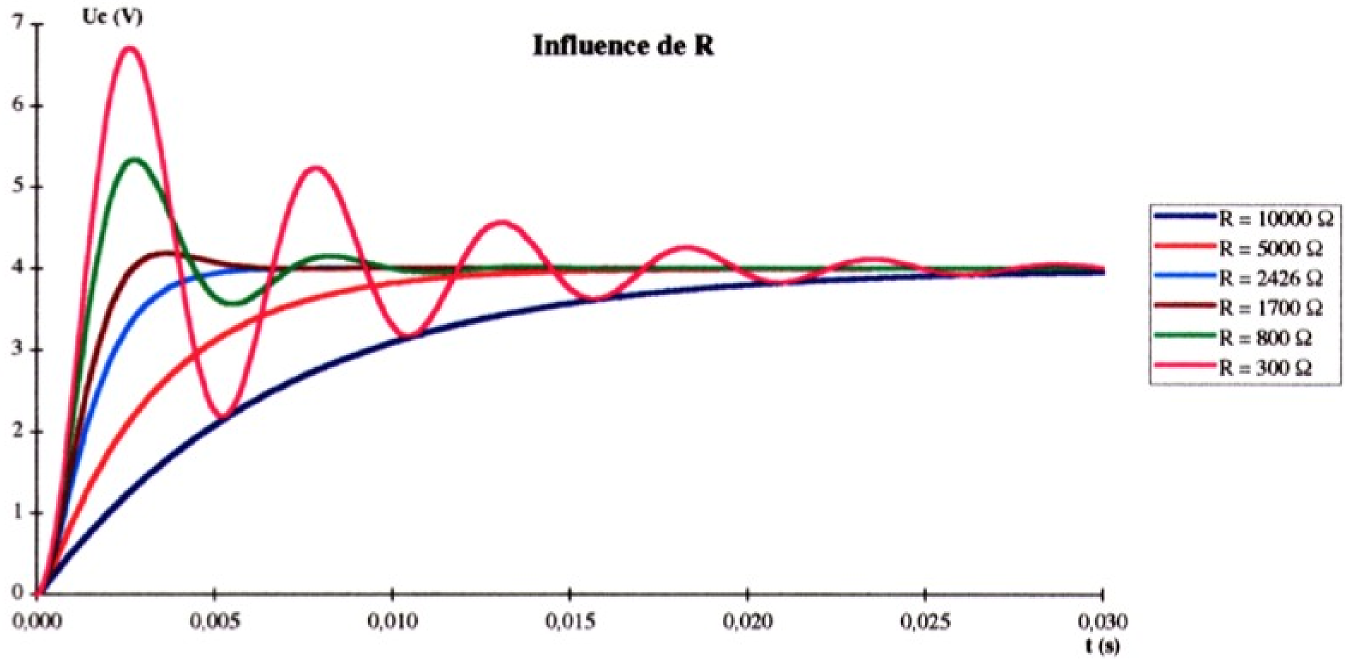
Si L et C sont constants, on constate que plus R augmente plus les oscillations sont atténuées.

• Si $R < R_C$, le **régime est oscillatoire amorti**.
• Si $R > R_C$, le **régime est apériodique**; le régime permanent est atteint sans oscillation.

R_C: résistance critique (qui correspond à $Q = 1/2$) .

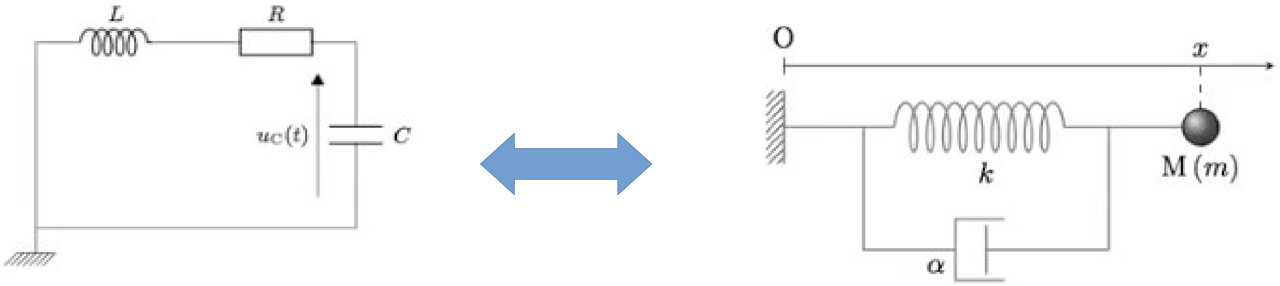
Déterminer R_C

Dans le cas ci-contre $R_c = 2425\ \Omega$
• R influence donc la durée du régime transitoire.
• u_C tend vers 4V, la tension d'alimentation.

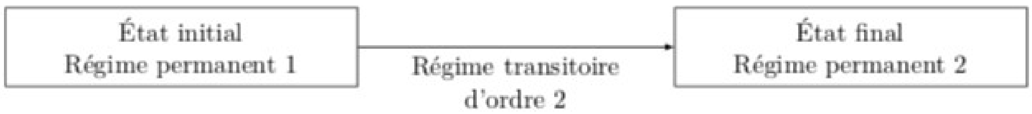


On vient donc de voir que l'on pouvait dégager plusieurs régimes. On va maintenant essayer de prédire quel sera le régime d'un système, quel paramètre pourra le faire passer d'un régime à l'autre et on va essayer d'estimer la durée du régime transitoire.

Équivalent mécanique



II



ETUDE QUANTITATIVE

II-1) <u>Système mécanique</u>

Mise en équation

On applique à nouveau le PFD (ou seconde loi de Newton) que l'on projette sur l'axe x en incluant en plus les forces de frottements modélisée par $\vec{f} = - h \; \vec{v}$

$$\vec{P}\begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix} \quad \vec{N}\begin{pmatrix}0\\N\end{pmatrix} \quad \vec{f}\begin{pmatrix}-h\dfrac{dx}{dt}\\0\end{pmatrix} \quad \vec{F}\begin{pmatrix}-k(x-l_o)\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad m\,\vec{a}\begin{pmatrix}m\dfrac{d^2x}{dt^2}\\0\end{pmatrix}$$

On obtient alors (selon Ox) :

x = OM= l (longueur du ressort).

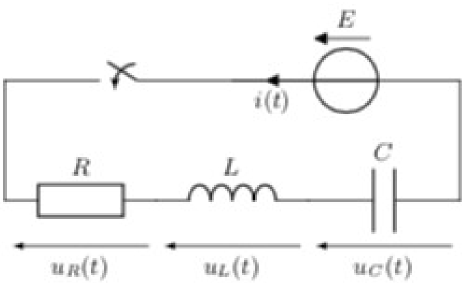
On voit bien qu'en l'absence de frottements h = 0, on retrouve l'oscillateur harmonique. Le terme devant la dérivée première représente l'amortissement.

Forme canonique

On met cette équation différentielle sous la forme canonique :

pulsation propre : $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et facteur de qualité : $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{h}$ (sans dimension).

Plus le facteur de qualité est grand, moins il y a d'amortissement ($h \rightarrow 0$).



II-2) <u>Circuit RLC</u>

Mise en équation

On étudie un circuit composé d'un condensateur de capacité C, d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L en série branchés sur une alimentation idéale E que l'on éteint à t = 0. Avant l'extinction de l'alimentation, on est en régime permanent, donc le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil.

On a donc à $t < 0$, $u_L(t < 0) = 0$,$i(t < 0) = 0$, $u_R(t < 0) = Ri(t < 0) = 0$ et $u_c(t < 0) = E - u_L - u_R = E$,

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur $u_c(t = 0^+) = u_c(t = 0^-) = 0$ et par continuité du courant qui traverse la bobine $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$.

Nous allons voir lors de la résolution que nous avons besoin de ces deux conditions initiales.

On obtient donc l'équation différentielle :

en fonction de u_C : $\dfrac{d^2u_c}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{LC}u_C = \dfrac{E}{LC}$

en fonction de i : $\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{LC}i = 0$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Plus le facteur de qualité est grand, moins il y a d'amortissement ($R \rightarrow 0$).

Nous observons donc une fois de plus que la résolution d'un des deux problèmes donne la solution de l'autre : c'est tout l'intérêt de l'analogie entre différents modèles.

Cherchons une solution générale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_o{}^2 y = \omega_o{}^2 y(\infty)$$

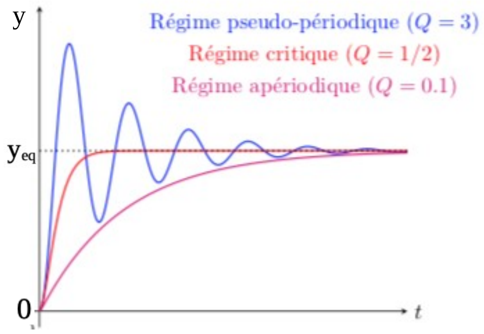
$$y(\infty) = y_{\text{équilibre}}$$

Pour cela, nous devons calculer le **polynôme caractéristique** de l'équation homogène :

$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_o{}^2 y = 0$, soit ………………………………..

Les racines de ce polynôme dépendent du discriminant Δ = …………………………

Selon le signe de ce discriminant, les racines de ce polynôme sont réelles ou complexes.



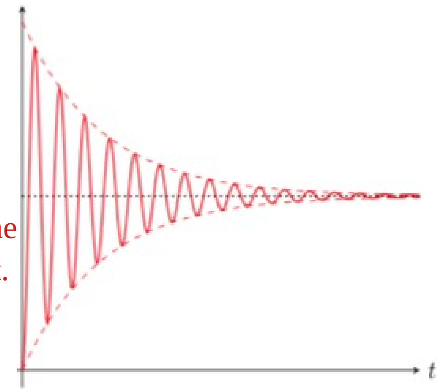
III ETUDE DES DIFFERENTS CAS

Le régime pseudo-périodique

Définition.

Le **régime pseudo-périodique** s'observe lorsque Q > 1/2.

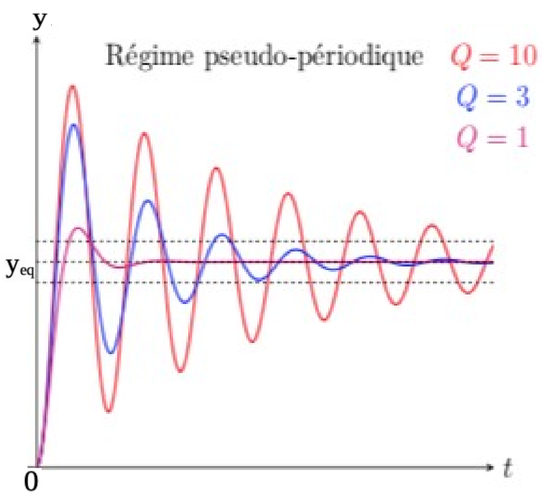
Dans ce cas, le régime transitoire est un régime oscillant à une pulsation différente de ω_0 dont l'amplitude décroît exponentiellement.



L'enveloppe exponentielle est tracée en pointillée. Le premier régime permanent correspond à $y(t < 0) = y_0$ puis le second régime permanent correspond à $y(t \rightarrow +\infty) = y_{eq}$. Ici Q = 10.

Remarque :

Prenons Q >> 1, dans ce cas, dans l'équation différentielle, on a ω_0/Q qui tend vers 0. L'équation devient celle de l'oscillateur harmonique, on observera donc des oscillations. Ce phénomène se retrouve en constatant que Q est inversement proportionnel à h, la constante de la force de frottement. Et donc plus Q est grand, plus les frottements sont négligeables.



Le régime critique

Définition.

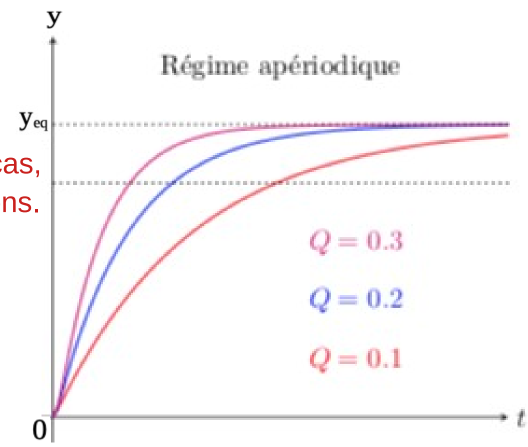
Le régime **critique** est le régime intermédiaire entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique. Il s'observe pour rigoureusement $Q = 1/2$. Il s'agit du régime transitoire le plus court et qui se rapproche le plus rapidement possible du régime permanent.

C'est un régime idéal car, à cause des incertitudes expérimentales, il est impossible d'avoir rigoureusement la condition $Q = 1/2$ sur un système réel. On peut toutefois s'en rapprocher.

Le régime apériodique

Définition.

Le régime **apériodique** s'observe lorsque Q < 1/2. Dans ce cas, le régime transitoire est un retour à l'équilibre sans oscillations. y(t) est composée d'une somme de deux exponentielles.



Durée du régime transitoire du régime critique en fonction du facteur de qualité Q pour ω_0 fixé.

Prenons cette fois Q << 1, dans ce cas, dans l'équation différentielle, on a ω_0/Q qui tend vers l'infini. Comme Q est inversement proportionnel à h, la constante de la force de frottement, cela signifie que celle-ci est très importante. Ce phénomène correspond par exemple à lâcher le ressort dans un fluide très visqueux, comme de l'huile.

Il n'y aura donc naturellement aucune oscillations.

IV DUREE DU REGIME TRANSITOIRE

On observe dans les trois régimes une décroissance exponentielle, on peut donc estimer la durée du régime transitoire.

IV-1) Régime pseudo-périodique

La solution est de type $y(t) = e^{-\omega_0/(2Q).\,t}$ (A cos(ωt) + B sin(ωt)) décroissance de l'amplitude de la forme $e^{-t/\tau}$.

D'où $\tau = (2Q)/\omega_0$. Le régime transitoire est terminé au bout de $5\tau = (10Q)/\omega_0$.

La durée du régime transitoire dans le cas du régime pseudo-périodique est de $10\,Q / \omega_0$.

On retiendra que le régime transitoire du régime pseudo-périodique est d'autant plus long que Q est grand et que le nombre N de pseudo périodes observables est donné par N≈Q.

IV-2) Régime apériodique

La durée d'un régime transitoire d'un régime exponentiel est liée à la constante de temps dans l'ex-exponentielle. Ici, il y a deux exponentielles de constantes de temps $1/r_1$ et $1/r_2$. La durée du régime transitoire sera imposée par l'exponentielle la plus longue. Or, comme $r_1 > r_2$, la durée du régime transitoire est donnée par r_2

La solution est de type $y(t) = A\,e^{-r_1 t} + B\,e^{-r_2 t}$ avec $r_{1,2} = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2}-4} \right)$

$\tau = 1/r_2$ avec $r_2 = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2}-4} \right)$ D'où $5\tau = 10/ \left[\omega_0 \left(\frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{1}{Q^2}-4} \right)\right]$

Si on prend Q <<1 , on obtient : $\sqrt{\frac{1}{Q^2}-4} = \frac{1}{Q}\sqrt{1-4Q^2} = 1/Q\,(1 - 2Q^2)$ (développement limité d'ordre 2) et donc $5\tau = 10/ \left(\omega_0\left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q} + 2Q \right)\right) = \frac{5}{\omega_0 Q}$

La durée du régime transitoire τa du régime apériodique est donnée par $\frac{5}{\omega_0 Q}$

On retiendra que le régime transitoire du régime apériodique est d'autant plus long que Q est petit.

IV-3) Régime critique

$y(t) = e^{-\omega_0 t}(A + B\,t)$

Donc le régime transitoire peut être considéré comme terminé au bout de $5\tau = \frac{5}{\omega_0}$

Le régime critique est celui dont le régime transitoire est le plus court.

V ETUDE ENERGETIQUE

Nous souhaitons étudier l'évolution de l'énergie mécanique. Comme pour toutes les études mécaniques, partons de l'équation de la seconde loi de Newton que nous multiplions par la vitesse $\frac{dx}{dt}$, il vient :

VI ANALOGIES

On constate que les études du ressort amortie et du RLC séries sont très similaires. Plus généralement, on constate une analogie entre les systèmes électriques et mécaniques. La comparaison des équations différentielles permet d'affirmer les équivalences suivantes.

On peut donc compléter l'analogie effectuée précédemment :

Masse-ressort	**Circuit RLC**
Masse : m	Inductance :L
Raideur du ressort : k	$\frac{1}{C}$
Vitesse : v	Intensité du courant :i
Position : x	Charge : q
k c	u_c
Coefficient de frottement : h	R
hv^2	Puissance Joule :Ri^2

PLAN

I APPROCHE EXPERIMENTALE

I-1) Système mécanique

I-2) Portrait de phase

I.3) Electricité : circuit RLC

II ETUDE QUANTITATIVE

II-1) Système mécanique

II-2) Circuit RLC

III ETUDE DES DIFFERENTS CAS

Le régime pseudo-périodique

Le régime critique

Le régime apériodique

IV DUREE DU REGIME TRANSITOIRE

IV-1) Régime pseudo-périodique

IV-2) Régime apériodique

IV-3) Régime critique

V ETUDE ENERGETIQUE

VI ANALOGIES