# 1.Thème 1 : ondes et signaux

## S4. Oscillateur harmonique

| | |
|---|---|
| **Oscillateur harmonique**.<br><br>Exemples du mouvement sans frottement d'une masse accrochée à un ressort linéaire sans masse, et du circuit LC. | Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.<br><br>Déterminer, en s'appuyant sur des arguments physiques et une analyse dimensionnelle, la position d'équilibre et le mouvement d'une masse fixée à un ressort vertical.<br><br>Réaliser le bilan énergétique du circuit LC. |

**Les systèmes oscillants ou les phénomènes de vibrations se retrouvent dans quasiment tous les domaines de la physique et sont donc très présents autour de nous:**

- *Mécanique* : cordes vocales, battement de cœur, balançoire, suspension de voiture ...
- *Electricité*: circuits électriques oscillants (circuit RLC), courant et tension alternatifs
- *Physique microscopique* : position des électrons dans les atomes
- Oscillation qui se propage dans l'espace : onde (voir chapitres précédents)

    *Onde Electromagnétique*: lumière, onde téléphonique

    *Acoustique* : son

**Dans ces domaines (Mécanique, Electricité, Physique microscopique, Electromagnétique, Acoustique), on retrouve les mêmes équations avec des grandeurs physiques différentes.**

Dans tous ces domaines, la définition d'un oscillateur est la même.

Un oscillateur est un système physique pour lequel il y a une variation au cours du temps d'une grandeur physique de part et d'autre d'un état d'équilibre.

Donc , beaucoup de systèmes en physique sont des systèmes oscillants. Dans ce chapitre nous allons étudier **le modèle de l'oscillateur harmonique** qui permet de décrire ce genre de comportement. Cet exemple est fondamental en physique, et nous le retrouverons dans une multitude de systèmes physiques très différents, en particulier en mécanique et en électricité.

Si les variations se reproduisent à l'identique à elles mêmes au cours du temps, on dit que **<u>l'oscillateur est périodique</u>** (exemple: le pendule).

Si les variations au cours du temps sont **sinusoïdales** alors l'oscillateur est un **<u>oscillateur harmonique</u>** .

Si les variations **diminuent au cours du temps**, on dit que l'**<u>oscillateur est amorti</u>** *.

Si les variation sont e**ntretenues par système extérieur**, on dit que l'**<u>oscillateur est en régime forcé</u>** *.

*** : voir chapitres ultérieurs.**

# I OSCILLATEUR HARMONIQUE

**I-1)** <u>Mise en équation de l'oscillateur harmonique</u>

*Cas du circuit LC*

- **Circuit et conditions initiales**

On étudie un circuit composé d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L en série, branchés sur une alimentation idéale E que l'on éteint à t = 0 (en fait on bascule un interrupteur pour mettre le circuit LC en court-circuit ).

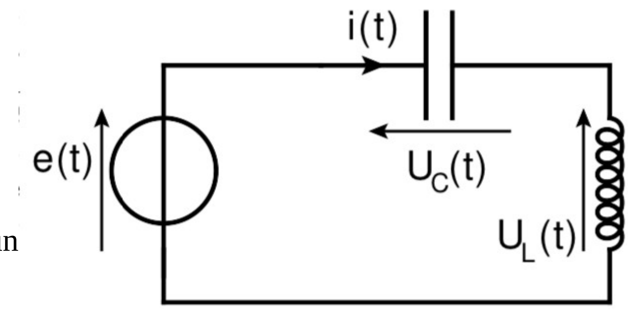
**Avant l'extinction de l'alimentation, on est en régime permanent**, donc le **condensateur** est équivalent à un **interrupteur ouvert** et la **bobine** à un **fil.**

On a donc à $t < 0$,

$u_L(t < 0) = 0$ car la **bobine** est équivalente à un **fil.**

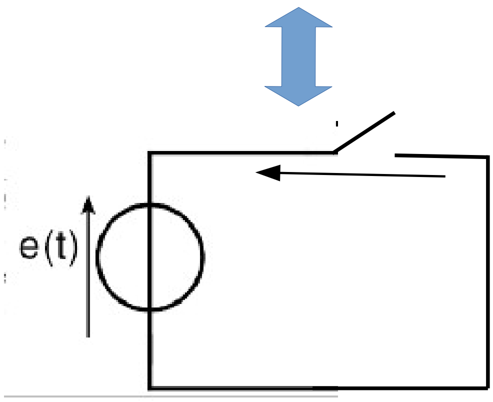
$u_c(t < 0) = E - u_L = E$ d'après la loi des mailles.

$i(t<0)=0$ car le **condensateur** est équivalent à un **interrupteur ouvert**.




Circuit à t < 0

Donc, juste avant de supprimer E, $u_c(t = 0^-) = E$ et $i(t = 0^-) = 0$




Par **continuité** de la tension aux bornes du condensateur

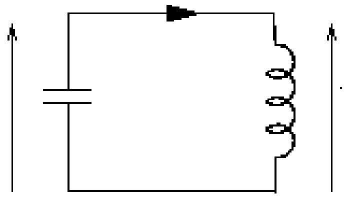
$u_C(t = 0^+) = u_C\ t = 0^-) = E$

et par **continuité** du courant qui traverse la bobine

$i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0.$

Nous allons voir, lors de la résolution, que nous avons besoin **de ces deux conditions initiales (Cauchy).**

**- Mise en équation**



Circuit à t > 0

Aux instants t > 0, nous avons les relations :

Loi des mailles:

condensateur :

bobine :

On obtient donc l'équation différentielle :

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants sans second membre.

La forme canonique de cette équation est :

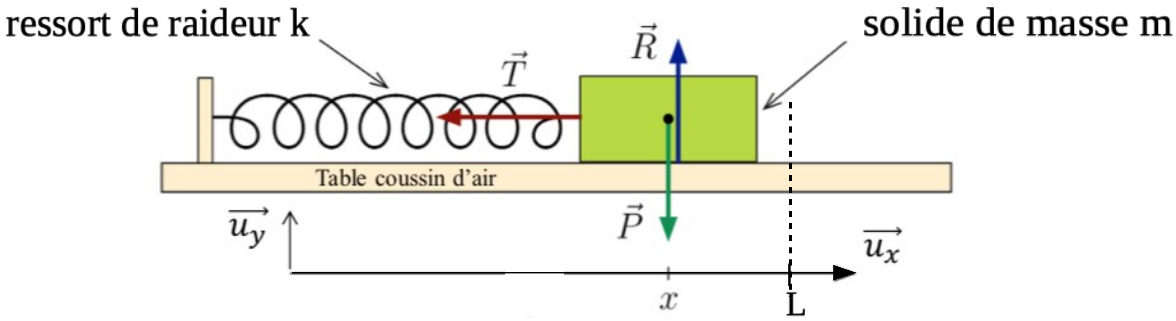
Il s'agit de l'**équation canonique d'un oscillateur harmonique, $\omega_0$ est la pulsation propre de l'oscillateur (en rad.s$^{-1}$).**

*Avant d'effectuer la résolution, nous allons voir comment obtenir une équation différentielle d'oscillateur harmonique en mécanique, pour montrer la généralité des phénomènes observés.*

## *Cas du système masse ressort horizontal*

**- Montage et conditions initiales**

Description: soit un ressort de raideur k et de longueur $l_O$ au repos. Une masse m est accroché à une extrémité du ressort, l'autre extrémité est accroché à un support fixe. La masse repose sur une table à coussin d'air ce qui permet de ne pas avoir de frottement. Au repos le centre de gravité de la masse est en $x_0$ . https://youtu.be/SHvBjJY5Tu4




On tire la masse de façon à avoir le centre de gravité en L et à l'instant t = 0, on lâche le masse sans vitesse. Pour les conditions initiales, cela se traduit par : x ( t = 0) = L   et   v ( t = 0) = 0. (Cauchy).

Rappels de mécanique

Le mouvement d'un système mécanique est lié aux forces qu'il subit par le **principe fondamental de la dynamique** (PFD) ou **seconde loi de Newton** :

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

somme des forces qui s'exercent sur la masse accélération de la masse

On verra au cours du deuxième semestre la signification précise de chaque terme et quelles hypothèses ont été faites pour arriver à ce résultat.

On va se contenter ici d'étudier le **mouvement le long de l'axe horizontal** que nous appellerons axe Ox, et nous allons suivre le mouvement de la masse caractérisé par sa position x.

**Le système étudié est la masse m dans le référentiel terrestre $R_T$ supposé galiléen. Le problème sera étudié en coordonnées cartésiennes.**

D'autre part, un ressort est caractérisé par :

sa **longueur à vide** $l_0$ qui correspond à la longueur du ressort au repos ;

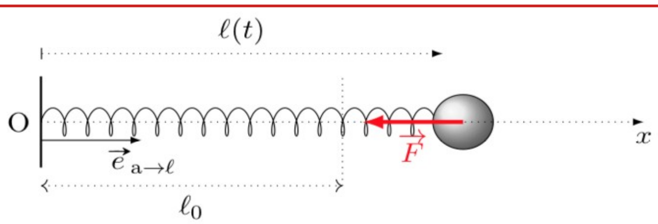
sa **raideur** k qui s'exprime en N/m.

Lorsque le ressort est déformé par une extrémité, celui-ci exerce une **force de rappel** sur cette même extrémité. Cette force est donnée par : $\vec{F} = -k(l - l_o)\vec{e}_{al}$

où k est la constante de raideur du ressort,

l sa longueur à l'instant t, $l_0$ sa longueur à vide (quand il n'est ni étiré ni comprimé) et

$\vec{e}_{al}$ le vecteur unitaire qui « sort du ressort »dirigé du point d'accroche vers l'extrémité libre du ressort , porté par l'axe du ressort.




Le signe signe moins dans l'expression de la force est important.

Si le ressort est étiré, soit $l - l_0 > 0$, …………………………

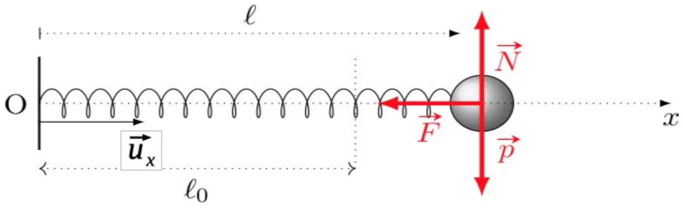
Si le ressort est comprimé, soit $l - l_0 < 0$, ……………………..

Cette modélisation n'est valable que pour les petites déformations. En effet, si on tire trop fort sur le ressort, celui-ci va se déformer et ne reviendra pas à sa position initiale. L'hypothèse élastique ne sera alors plus valable.

Dans un exercice, une des premières difficultés sera généralement l'expression de la longueur l(t) en fonction des données du problème. Cette expression doit être donnée dans le bilan des forces. Par ailleurs, il faut toujours matérialiser la longueur à vide $l_0$ sur le schéma.

**- Mise en équation**

On fait un schéma dans une situation quelconque en orientant la force de rappel.




$\vec{e}_{al} = \vec{u}_x$

l = x (longueur du ressort).

**Bilan des forces :**

Pour cet exemple, nous ne devons considérer que les forces qui s'exercent le long de l'axe Ox (il y a seulement un mouvement selon l'axe horizontal), ce qui exclu le poids et la réaction **normale** exercée par le rail (**il n'y a pas de frottements**). Il ne reste donc que la force exercée par le ressort car le poids et la réaction se compensent.

**Vecteurs cinématique :**

**Seconde loi de Newton :**

On projette la seconde loi de Newton sur la direction (Ox) :

**Forme canonique**

**I.2)** <u>Résolution</u>

L'équation que l'on doit résoudre est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$\frac{d^2}{dt^2} x + \omega_o^2 x = \omega_o^2 l_o$$

Les solutions de cette équation sont à connaitre par cœur et sont de la forme :

$$x(t)= A \cos(\omega_o t) + B \sin(\omega_o t)+ l_o$$

Il y a maintenant deux constantes à déterminer, ce qui est généralement le cas pour les équations du second ordre. C'est pour cette raison qu'il nous faut spécifier deux conditions initiales.

Remarque :

Il est aussi possible d'exprimer $x(t) = A' \cos(\omega_o t + \phi) + l_o$ ou $x(t) = A' \sin(\omega_o t + \phi')+ l_o$

Les deux constantes à déterminer sont dans ce cas là $A'$ et $\phi$ (ou $\phi' = \phi - \pi/2$).

On a les relations $A = A' \cos \phi$ et $B = -A' \sin \phi$ obtenues avec la relation de trigonométrie usuelle

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

## *Cas du circuit LC*

On a donc $u_c(t) = A \cos(\omega_o t) + B \sin(\omega_o t)$ avec les conditions initiales $u_c(t = 0) = E$ et $i(t = 0) = 0$.

La première condition initiale fixe la valeur de $A = E$.

La deuxième condition initiale porte sur i et non sur $u_c$. Pour passer de l'un à l'autre, et avoir une condition initiale qui porte sur la fonction que l'on étudie $u_c$, on utilise la relation qui lie les deux pour un condensateur cela donne : $i = - C\, du_c/dt$.

On en déduit la deuxième condition initiale : $du_c/dt(t = 0) = 0$.

De manière générale, pour une équation différentielle du deuxième ordre, il nous faut la valeur de la fonction recherchée et de sa dérivée à un instant donné.

Cette deuxième condition fixe $B = 0$, on obtient donc :

$$u_c(t > 0) = E \cos(\omega_o t)$$

ainsi que le courant : $i\,(t>0) = - C\, du_c/dt$ d'où

$$i\,(t>0) = CE\omega_0 \sin(\omega_o t) \quad \text{ou} \quad i\,(t>0) = CE\omega_0 \cos(\omega_o t - \pi/2)$$

## *Cas du système masse-ressort*

On étire le ressort d'une certaine longueur L puis on lâche la masse sans lui communiquer de vitesse initiale. Les conditions initiales sont donc $x(t = 0) = L$ et $dx/dt(t = 0) = 0$.

La résolution donne une fois de plus $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + l_0$. La première condition initiale donne $A = L - l_o$, la seconde donne $B = 0$.

D'où : $x(t) = (L - l_0)\cos(\omega_o t)$ et $v(t) = -\omega_0 (L - l_0) \sin(\omega_o t) = \omega_0 (L - l_0)\cos(\omega_o t + \pi/2)$

$x(t) = l(t)$ longueur du ressort à l'instant t.

## II ANALOGIES

On voit après résolution que les deux systèmes présentent la même évolution temporelle. On aurait pu s'épargner la résolution du deuxième système si on avait établi une analogie entre les deux problèmes en identifiant : le système masse-ressort et le circuit LC .

**Masse-ressort**

$$\frac{d^2}{dt^2} x + \omega_o^2 x = \omega_o^2 l_o \quad \text{avec} \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

**Circuit LC**

$$\frac{d^2}{dt^2} q + \omega_o^2 q = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC}$$

| Masse-ressort | Circuit LC |
|---|---|
| m | |
| k | |
| x | |
| v | |
| k x | |
| $1/2\ kx^2$ | |
| $1/2\ mv^2$ | |

## III ETUDE ENERGETIQUE

### *Cas du circuit LC*

A tout instant t on peut déterminer l'énergie stockée dans le condensateur $E_C = 1/2\ Cu_c^2(t)$ et celle emmagasinée dans la bobine $E_L = 1/2\ L\ i^2(t)$

On trouve donc les valeurs respectives :

$u_c(t) = E \cos(\omega_o t)$

$i(t) = CE\omega_0 \sin(\omega_o t)$

$\omega_0^2 = 1/LC$

$$\boxed{\begin{aligned} E_c(t) &= \frac{CE^2}{2}\cos^2(\omega_0 t) \\ E_L(t) &= \frac{LC^2\omega_0^2E^2}{2}\sin^2(\omega_0 t) = \frac{CE^2}{2}\sin^2(\omega_0 t) \end{aligned}}$$

- On observe donc que l'énergie stockée dans le condensateur à l'état initial est transformée en énergie stockée dans la bobine, puis à nouveau stockée dans le condensateur et ce indéfiniment.

- On observe de plus la conservation de l'énergie puisqu'il n'y a pas d'énergie dissipée par effet Joule : $E_c(t)+E_L(t) = CE^2/2 = cte$.

Démonstration :

$E_c(t) + E_L(t) =$

### *Cas du système masse-ressort*

On peut réutiliser l'analogie entre les deux systèmes que l'on a vu.

L'équivalent de $E_L(t)=1/2\ Li^2(t)$ devient alors $1/2\ mv^2(t)$.On reconnait l'énergie cinétique de la masse.

L'équivalent de $E_C(t) = 1/2\ Cu^2\ (t)$ est : $1/2\ kx^2$. Il s'agit en réalité de l'énergie stockée dans le ressort lorsqu'on le comprime ou l'étire : on parle d'**énergie élastique**. Cette énergie potentielle stockée dans le ressort peut alors être convertie en énergie cinétique.

Ce que l'on observe alors est la **conservation de l'énergie mécanique** : en l'absence de phénomènes dissipatifs, la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles est une constante.

En particulier ici :

$$\boxed{\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t) = \frac{kx_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t) \\ E_{pot} &= \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{kx_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t) \end{aligned}}$$

On a donc bien : $E_{cin} + E_{pot} = 1/2\ k\ x_0^2 = cte$.

## IV ADAPTATION DES RESULTATS A D'AUTRES SITUATIONS.

Un oscillateur harmonique est un système physique décrit par la fonction g(t) vérifiant l'équation différentielle harmonique ci-dessous avec $\omega_0$ la pulsation propre du système et $g_e$ la valeur d'équilibre de la fonction g(t).

$$\boxed{\ddot{g}(t) + \omega_0^2 g(t) = \omega_0^2 g_e}$$

Cette équation différentielle est à connaître sous cette forme par cœur.

Cette équation différentielle apparaît dans de très nombreux problèmes physiques, et elle apparaît d'autant plus lorsque l'on étudie des petites perturbations d'un système autour d'un point d'équilibre.

On peut adapter les résultats précédents directement à deux autres situations dans le cas du système masse-ressort.

IV-1) Changement des conditions initiales

Si au lieu de lâcher la masse sans vitesse initiale, on lui transmet une impulsion de vitesse $v_0$ lorsqu'elle est à l'équilibre .

Les conditions initiales sont donc $l(t = 0) = l_0$ et $dx /dt(t = 0) = v_0$.

La résolution donne une fois de plus $l(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + l_0$. La première condition initiale donne $A = 0$, la seconde donne $\omega_0 B = v_0$.

On peut donc écrire : $l(t) = v_0 / \omega_0 \sin(\omega_o t) + l_0$ et $v(t) = v_0 \cos(\omega_o t)$

IV-2) Système masse-ressort vertical

Si on considère le même système masse-ressort, mais qu'on le place le long de la verticale, on s'attend à ce que la pesanteur joue un rôle.

On va donc avoir la même équation différentielle, le changement étant dans le second membre : en régime permanent, le ressort va être allongé à cause de la masse qui lui est accrochée.

La nouvelle position d'équilibre est donc $z_{eq}$ telle que la force exercée par le ressort compense le poids ( l'accélération est nulle): $k\, z_{eq} = mg$.

On peut donc déduire l'équation différentielle : $\frac{d^2}{dt^2} z + \omega_o^2 z = \omega_o^2 . \frac{mg}{k}$

$$\frac{d^2}{dt^2} z + \omega_o^2 z = g \quad \text{(avec } z = l - l_o \text{ allongement du ressort)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} l + \omega_o^2 l = \omega_o^2 .( l_o + \frac{mg}{k} ) \quad \text{avec } l \text{ : longueur du ressort.}$$

On va donc observer des oscillations à la même pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ que le ressort soit horizontal ou vertical, autour d'une position d'équilibre qui au lieu d'être à la longueur à vide $l_0$ pour le cas horizontal passe à la longueur $l = l_0 + \frac{mg}{k}$ dans le cas vertical.

Vérifier que mg/k est bien homogène à une longueur.

# V PORTRAITS DE PHASE

Un outil graphique très pratique pour étudier un système dynamique est le **portrait de phase**. Il consiste à tracer la courbe v(x), contrairement au tracé de x(t), v(t).

Le **portrait de phase** en mécanique d'un système est le tracé de la vitesse v du système en fonction de sa position x.

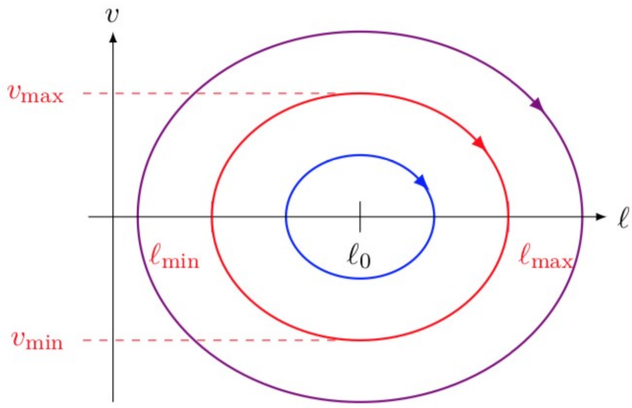
*Cas du système masse-ressort horizontal*

Lors de la résolution on a trouvé :

$$l(t) - l_o = (L - l_0) \cos ( \omega_o t) \quad \text{et} \quad v(t) = -\omega_0(L - l_0) \sin ( \omega_o t)$$

Portrait de phase d'un système masse-ressort horizontal. Chaque trajectoire correspond à une énergie mécanique fixée.

On a la relation : $(l(t) - l_o)^2 + (v/\omega_0)^2 = (L - l_0)^2$ /donc la courbe est une ellipse. ($L = l_{max}$).




*Portrait de phase d'un système masse-ressort horizontal. Chaque trajectoire correspond à une énergie mécanique fixée.*

On trouve donc une ellipse centrée $l_o$, d'extension horizontale $L = l_{max}$ et d'extension verticale $v_{max} = \omega_0(L - l_0)$. Ici , sont représentées plusieurs ellipses (ou cercles) correspondants à des conditions initiales différentes.

Ce résultat met en évidence un premier intérêt du portrait de phase : la représentation de celui-ci permet de tester avec précision le caractère sinusoïdal de l'évolution d'un oscillateur.

Le fait que les trajectoires soient fermées dans le portrait de phase est une matérialisation de la conservation de l'énergie du système et du caractère périodique du mouvement. Attention, tout système dont l'énergie se conserve n'a pas nécessairement une trajectoire dans le portrait de phase fermée.

Le sens de parcours de l'ellipse est toujours le même : quand on est dans la partie supérieure (au dessus de l'axe des abscisses) , $v > 0$, donc x est croissant, on va de gauche à droite. A l'inverse, dans le demi-plan $v < 0$, on va de droite à gauche

**Dans un portrait de phase, les courbes sont parcourues dans le sens des aiguilles d'une montre.** Ici, les courbes du portrait de phase sont fermées : le mouvement est **périodique**.

## Cas du circuit LC

On trace alors duc/dt = f (uc). On obtient alors le même portrait de phase que dans le cas précédent

## Cas du système masse-ressort vertical

On observe toujours la même ellipse. La seule différence avec le cas horizontal sera le centre de l'ellipse : il sera en $l_{eq} = l_o + mg/k$ au lieu d'être en $l_o$.

*L'oscillateur harmonique non amorti est un modèle, il n'est pas suffisant pour étudier par exemple, un amortisseur de voiture. L a modélisation d'un amortisseur de voiture par un système masse-ressort n'est donc pas satisfaisante : on observerait indéfiniment des oscillations autour de la position d'équilibre, à cause de la conversion de l'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement. Il est donc nécessaire d'introduire un élément dissipatif dans notre étude : c'est le modèle de l'oscillateur harmonique amorti.*

**https://youtu.be/u13rckeBXt0**

# PLAN

## I OSCILLATEUR HARMONIQUE

**I-1)** Mise en équation de l'oscillateur harmonique

Cas du circuit LC

Cas du système masse ressort

**I.2)** Résolution

## II ANALOGIES

## III ETUDE ENERGETIQUE

Cas du circuit LC
Cas du système masse ressort

## IV ADAPTATION DES RESULTATS A D'AUTRES SITUATIONS.

IV-1) Changement des conditions initiales

IV-2) Système masse-ressort vertical

## V PORTRAITS DE PHASE

Cas du système masse-ressort horizontal

Cas du circuit LC

Cas du système masse-ressort vertical

ANNEXE

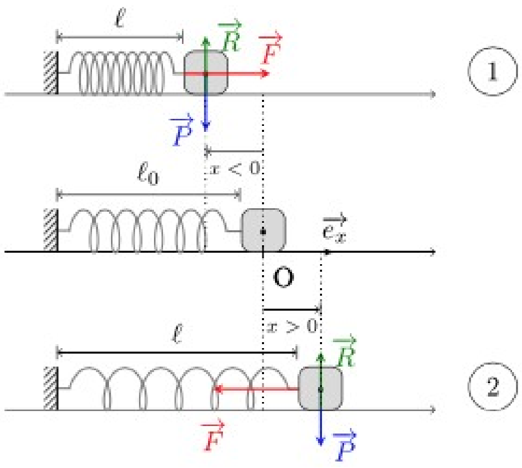



Figure 1 - Force s'exerçant sur la masse accrochée au ressort horizontal

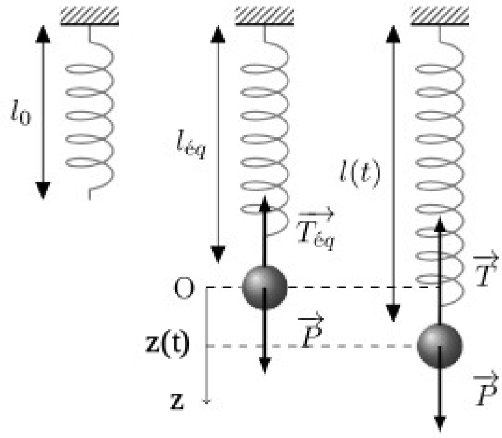



Figure 3 - Oscillations d'une masse suspendue à un ressort vertical

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

x

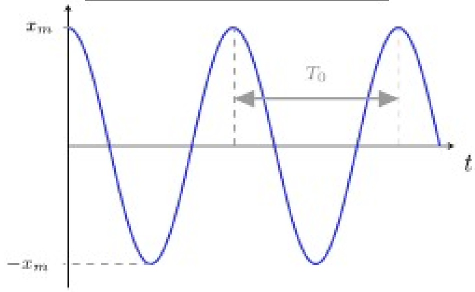



Figure 2 - Oscillations harmoniques

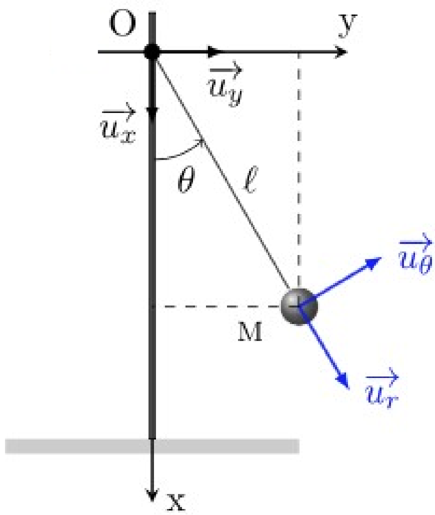



Figure 4 - Pendule simple et base polaire

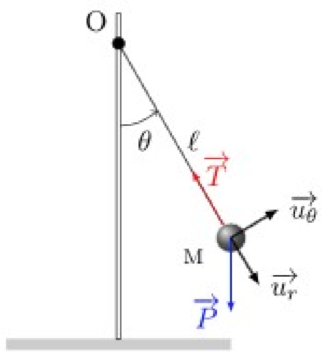



Figure 5 - Pendule simple et bilan des forces