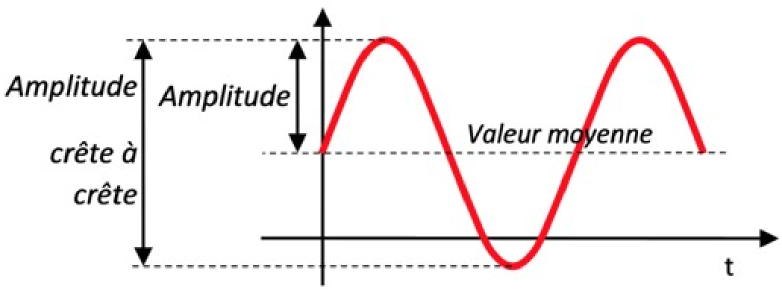
Les régimes sinusoïdaux

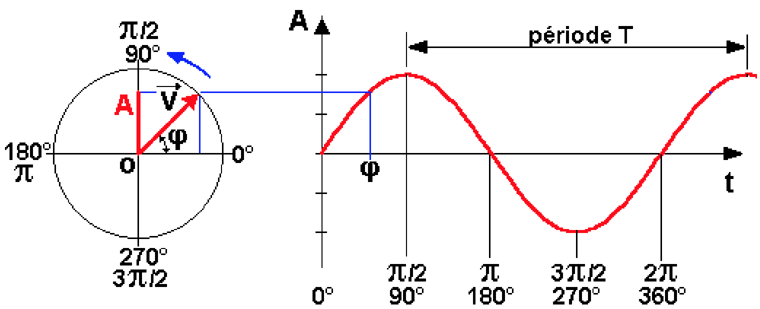
Régime sinusoïdal forcé, **impédances complexes.**	Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime sinusoïdal.
Association de deux impédances	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

Rappels

• *Représentation complexe d'un signal.*
• *Impédance complexes : propriétés, exemples (résistor, condensateur, bobine, générateurs de tension et de courant), associations d'impédances.*
• *Théorèmes de l'électrocinétique en RSF : Lois de Kirchhoff, ponts diviseurs.*

L'étude d'une tension sinusoïdale est primordiale pour deux raisons : tout d'abord, le réseau électrique EDF délivre une tension sinusoïdale (220 V à la fréquence de 50 Hz), ensuite, la **décomposition en série de Fourier** nous assure que l'on pourra directement résoudre le cas plus général d'une tension qui varie périodiquement à partir de fonctions sinusoïdales.





Période: T (s) ,

fréquence: $f=\frac{1}{T}$ (Hz) ,

pulsation: $\omega=2\frac{\pi}{T}=2\pi f$

Tension efficace: $U_{eff}=\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$

I. LA NOTATION COMPLEXE EN ELECTRICITE

I.1. La notation complexe

Soit une fonction sinusoïdale quelconque : e (t) = E_m cos (ω t +φ)

E_m est l'amplitude et φ la phase.

La représentation complexe de e(t) est : $\underline{e}(t) = E_m \exp j(\omega t + \varphi)$

$$\underline{e}(t) = E_m \exp(j(\omega t)) x \exp(j\varphi) = \underline{E_m} \exp(j\omega t)$$

$\underline{E_m}$ est l'amplitude complexe de $\underline{e}$(t).

Le passage du signal complexe e au signal réel e(t) s'effectue tout simplement en remarquant que :

$$e(t) = Re(\underline{e})$$

démonstration :

On peut remarquer également que l'amplitude complexe $\underline{E_m}$ contient toutes les informations utiles sur le signal sinusoïdal :

- l'amplitude du signal est le module de $\underline{E_m}$(t)

- la phase φ est l'argument de $\underline{E_m}$(t)

I.2 En quoi l'introduction de la notation complexe simplifie les résolutions ?

On a besoin de manipuler de nombreuses dérivées à cause des relations entre u(t) et i(t) relatives aux condensateurs et aux bobines. Avec la notation complexe, dérivation et intégration sont simplifiées.

$$\underline{e}(t) = E_m \exp j(\omega t + \varphi)$$

Calculer : $d\underline{e}(t)/dt$, $d^2\underline{e}(t)/dt^2$ et $\int \underline{e}(t)dt$

Dériver une fois par rapport au temps revient donc tout simplement à multiplier par jω, dériver deux fois, revient à multiplier par - ω^2 et intégrer par rapport au temps, revient à diviser par jω.

Remarque (voir chapitre suivant).

Une équation différentielle avec des dérivées temporelles se transforme simplement en une équation sans dérivées (uniquement des multiplications par jω, et - ω^2). Ensuite, toutes les grandeurs contiennent le terme exp(jω) en facteur : on pourra le simplifier aisément dans les équations pour ne plus avoir à manipuler de temps.

Concrètement, la recherche de la solution particulière (de forme sinusoïdale) s' effectue facilement.

- Toutes les équations et les signaux sont transformés en écriture complexe.
- Les calculs sont effectués sur les complexes , jusqu'à l'obtention de la solution.

Pour connaître la solution réelle (la seule qui ait une signification physique), il suffit de prendre la partie réelle de la solution complexe obtenue.

II. L'IMPEDANCE COMPLEXE

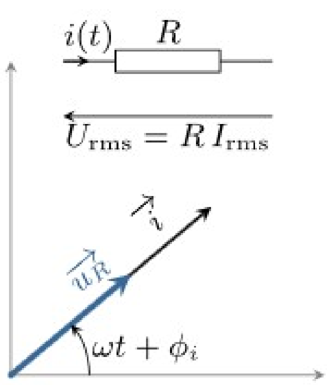
Pour la bobine, le condensateur et la résistance, il est possible d'écrire une relation de simple proportionnalité entre la tension complexe et le courant complexe :

$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$. C'est la loi d'ohm complexe.

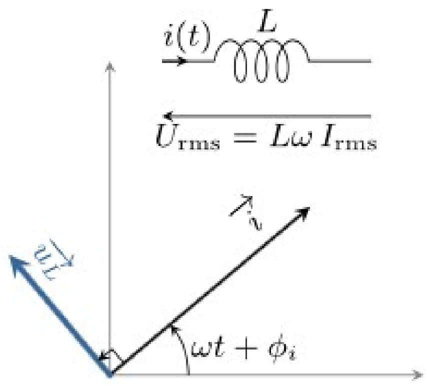
$\underline{Z}$ est appelée impédance complexe.

II.1 Impédances usuelles

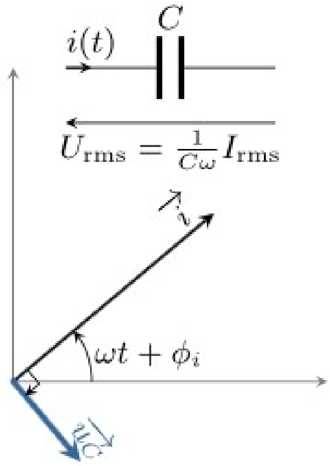
Conducteur ohmique	Bobine	Condensateur
$u(t) = R\,i(t)$	$u(t) = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$	$i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$
$\underline{u} = R\,\underline{i}$	$\underline{u} = jL\omega\,\underline{i}$	$\underline{i} = jC\omega\,\underline{u}$
$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_c = \frac{1}{jC\omega}$



u et i en phase



u en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur i



i en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur u

On obtient aussi les comportement à basses fréquences ($\omega \to 0$).

$Z_C \to \infty$ (condensateur équivalent à un coupe-circuit) et $Z_L \to 0$ (bobine équivalente à un fil).

Remarque on retrouve les comportements attendus en régime permanent.

On obtient aussi les comportement à hautes fréquences $\omega \to \infty$:

$Z_C \to 0$ (condensateur équivalent à un fil) et $Z_L \to \infty$ (bobine équivalente à un coupe-circuit).

II.2 Remarques importantes

$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$ s'écrit en module : $|\underline{U}| = |\underline{Z}|\,.\,|\underline{I}|$. D'où $|\underline{Z}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|}$

Le module de $\underline{U}$ est l'amplitude de la tension u(t) et le module de I est l'amplitude du courant i(t).

Le module de l'impédance est le rapport entre l'amplitude de la tension aux bornes du composant et l'amplitude du courant circulant dans ce composant.

$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$ s'écrit en phase : $\arg(\underline{U}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{I})$. D'où $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$.

L'argument de U est la phase de la tension u(t) et l'argument de I est la phase du courant i(t).

L'argument de l'impédance d'un composant est le déphasage entre la tension aux bornes du composant et le courant circulant dans ce composant.

Déterminer les déphasage tension /courant pour les dipôles usuels.

la bobine : $\underline{Z} = jL\omega$ arg($\underline{Z}$) =

le condensateur : $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}$ arg($\underline{Z}$) =

la résistance : Z = R arg($\underline{Z}$) =

On peut également introduire l'admittance complexe notée $\underline{Y}$: $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$. La loi d'ohm $\underline{U} = \underline{Z}\ \underline{I}$ s'écrit alors : $\underline{I} = \underline{Y}\ \underline{U}$.

$\underline{Z}$ est complexe, et contient donc une partie réelle et une partie imaginaire : $\underline{Z} = R + jX$:
$\underline{Z}$ est l'impédance, R s'appelle résistance et X réactance.

De même $\underline{Y}$ s'écrit : $\underline{Y} = G + j\,X'$
$\underline{Y}$ est une admittance, G une conductance et X' une susceptance.

III. LES THEOREMES GENERAUX DES CIRCUITS LINEAIRES

Dans ce paragraphe, tous les théorèmes généraux énoncés précédemment, concernant des circuits purement résistifs sont repris, et généralisés pour des circuits comportant résistances, bobines et condensateurs. Tous les théorèmes précédemment rencontrés se généralisent très bien en remplaçant les résistances R par des impédances Z.

III.1. Les lois de Kirchhoff en notation complexe

La loi des noeuds

Soit un noeud dans lequel arrivent des courants I_k. Les signes sont choisis positifs si les courants arrivent dans ce noeud; à l'inverse leur signe est négatif s'ils en repartent.

La loi des noeuds s'écrit simplement (dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires) :

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k = 0$$

La loi des mailles

Soit une maille composée de plusieurs impédances (non nécessairement en série). Les tensions aux bornes des composants sont notées U_k. Les signes sont choisis positifs si la flèche tension est dans le sens de parcours choisi pour la maille et négatifs si sens contraires.

La loi des mailles s'écrit simplement (dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires) :

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k = 0$$

III.2 Association d'impédances complexes, calcul d'impédances équivalentes

Association série : $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \underline{Z}_n = \Sigma\ \underline{Z}_i$

Associations parallèles

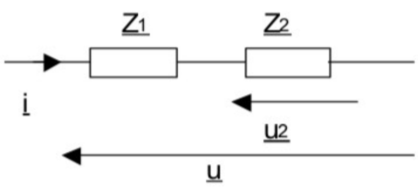
Considérons deux impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ placées en parallèle : $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\underline{Z}_i}\right)$

ou encore : $\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \ldots\ldots\ldots \underline{Y}_n$. (somme des admittances).

III.3 Le pont diviseur de tension et le pont diviseur de courant

Le pont diviseur de tension

Considérons deux impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ placées en série.

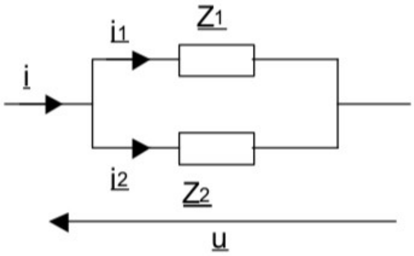


La tension aux bornes de l'impédance $\underline{Z}_2$ est : $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I} = \underline{Z}_2 \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$

Relation du pont diviseur de tension : $\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$

Attention: pour pouvoir appliquer le pont diviseur de tension, il est absolument nécessaire que le courant traversant les deux impédances soit le même!

Le pont diviseur de courant



$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1$

$\underline{U} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$

La tension aux bornes de ces deux composants est la même. Compte tenue de l'additivité des courant (loi des noeuds), il vient :

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I_1} + \underline{I_2} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z_1}} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z_2}} \\ \underline{I} &= \left(\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}\right)\underline{U} = \frac{1}{\underline{Z_{eq}}}\underline{U}. \end{aligned}$$

Le courant circulant dans l'impédance $\underline{Z}_2$ est :

$$\begin{aligned} \underline{I_2} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z_2}} = \underline{Y_2}\underline{U} = \frac{\underline{Y_2}\underline{I}}{\underline{Y_{eq}}} \\ \underline{I_2} &= \frac{\underline{Y_2}}{\underline{Y_1} + \underline{Y_2}}\underline{I} = \frac{(1/\underline{Z_2})}{1/\underline{Z_1} + 1/\underline{Z_2}}\underline{I}. \end{aligned}$$

PLAN