Oscillateurs en régime forcé. Résonances

Dans le chapitre précédent, on a étudié les **régimes libres des oscillateurs**. Pour cela, après avoir excité un système oscillant, **on le laisse évoluer librement.** Nous allons désormais nous intéresser à des oscillateurs soumis continuellement à une excitation sinusoïdale.

• Passage du régime transitoire au régime forcé, caractéristiques d'un signal sinusoïdal.
• Résonance en intensité ou en vitesse.
• Résonance en tension aux bornes du condensateur ou en élongation.
• Influence du facteur de qualité. Bande passante.
• Etude expérimentale.

https://youtu.be/uhWQ5zr5_xc

https://youtu.be/AljOuTUbIkc

https://youtu.be/ujwYjL1OdQc

https://youtu.be/gJKPRGi8FZc

Les solutions

https://youtu.be/R3nPWW_aTrw

https://youtu.be/ohKqE_mwMmo

https://youtu.be/47cPhhywvOo

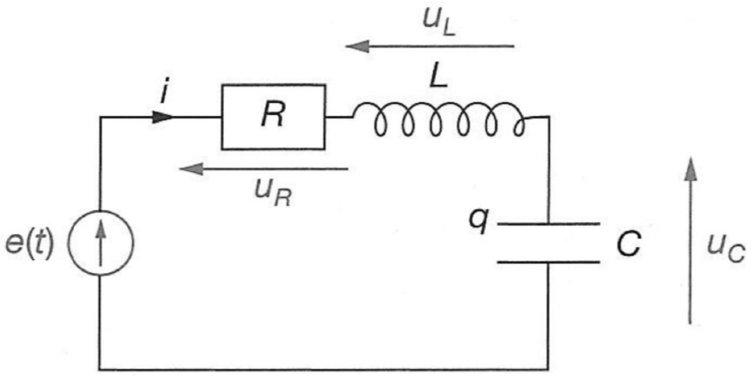
https://youtu.be/Ajblm_J8X3E

Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	**Mettre en œuvre un dispositif expérimental autour du phénomène de résonance.** Utiliser la méthode des complexes pour étudier le régime forcé. A l'aide d'un outil de résolution numérique, mettre en évidence le rôle du facteur de qualité pour l'étude de la résonance en élongation ou en tension. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

I – LE REGIME SINUSOIDAL FORCE

I-1) Oscillateur amorti

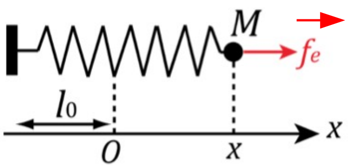
Considérons un circuit RLC série comportant un générateur basses fréquences (GBF) délivrant une tension sinusoïdale de pulsation : $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



La loi des mailles pour le circuit donne : $u_c + u_L + u_R - e(t) = 0$

C'est exactement l'équation différentielle obtenue au chapitre précédent pour le régime libre, mais elle comporte un **terme supplémentaire lié à l'excitation du générateur**.

On obtient le même type d'équation différentielle en mécanique où l'excitation serait due à une force supplémentaire : $\vec{f}_e = F_m \cos(\omega t)\vec{u}_x$



$$-k\,x + h\frac{dx}{dt} + F_m\cos(\omega t) = m\frac{d^2x}{d^2t}$$ soit

$$\frac{d^2x}{d^2t} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_m}{m}\cos(\omega t)$$

I-2) Résolution de l'équation différentielle

Les deux situations physiques précédentes mènent à des équations différentielles similaires, que l'on mettra sous la forme canonique : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = A_m cos(\omega t)$

La résolution mathématique de cette équation différentielle est la **somme de** :

* **la solution x_{SH} (t)** dite homogène de l'équation sans second membre, c'est-à-dire pour $A_m = 0$ (à excitation nulle). On détermine l'équation caractéristique associée et on aboutit à un des trois régimes transitoires : apériodique, critique ou pseudopériodique ;

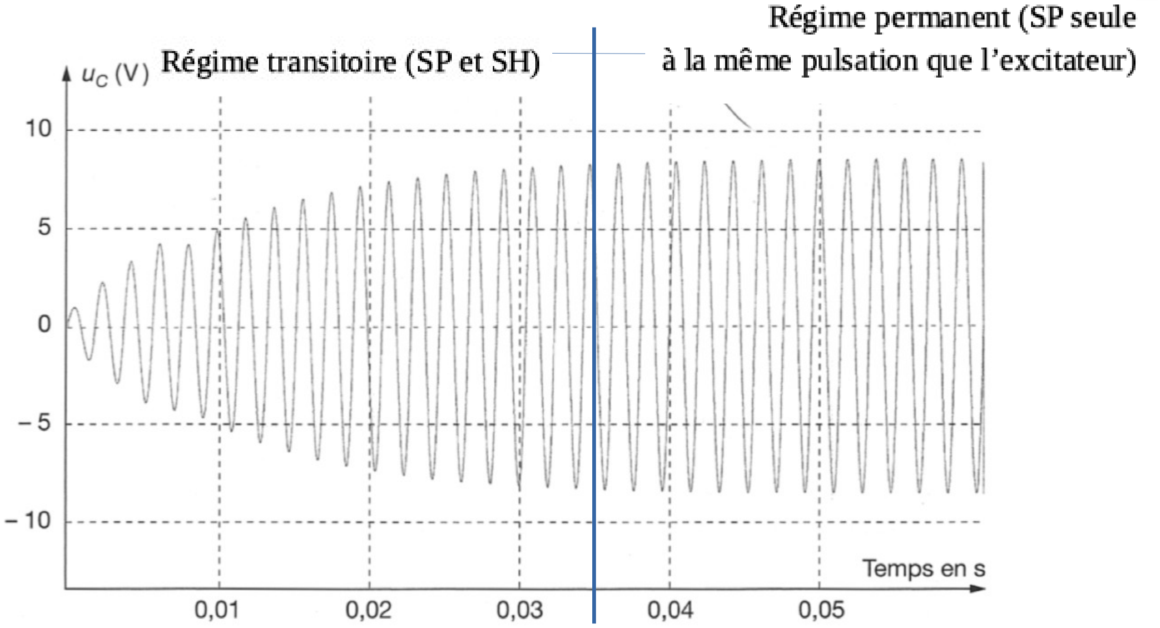
* **la solution particulière x_{SP} (t)** de l'équation. Dans le cas d'une excitation sinusoïdale, une solution particulière peut en fait être cherchée sous forme sinusoïdale, de même pulsation.

La solution homogène correspond au régime transitoire et s'annule au bout d'un certain temps (5τ).

En revanche, la solution particulière qui est sinusoïdale ici, ne tend pas vers 0. Ainsi, une fois le régime transitoire fini on a : $x(t) = x_{SH}(t) + x_{SP}(t) \sim x_{SP}(t)$

La solution s'identifie quasiment à la solution particulière sinusoïdale. C'est ce qu'on appelle **le régime sinusoïdal forcé.** En pratique, comme on l'a expliqué au chapitre précédent, les régimes transitoires sont très courts en électrocinétique, de l'ordre d'une fraction de seconde. Ainsi, pour le circuit RLC, si le générateur est branché au temps t = 0, une évolution classique de la tension aux bornes du condensateur est représentée sur la figure ci-dessous.

La charge du condensateur, initialement nulle, oscille sinusoïdalement après une durée de l'ordre de 30 ms : c'est le régime sinusoïdal forcé.



Ainsi, lorsqu'un système (linéaire) est soumis à une excitation sinusoïdale, les variables du système se mettent aussi à varier sinusoïdalement (avec la même pulsation) après un certain temps : c'est le régime sinusoïdal forcé.

Savoir-faire :

À partir de l'équation différentielle, déterminer par la méthode complexe l'expression de l'amplitude complexe en fonction de Q, ω , ω_0 et de l'amplitude de l'excitation sinusoïdale A_m.

II – METHODE DE RESOLUTION : utilisation des complexes

méthode évoquée au chapitre S5.

À la grandeur sinusoïdale : $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

on associe la grandeur complexe : $\underline{X}(t) = X_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = \underline{X}_m \exp(j\omega t)$

$\underline{X}_m$ est appelé amplitude complexe de $\underline{x}(t)$.

L'amplitude complexe de la variable $\underline{X}(t)$ contient deux informations :

- son module donne l'amplitude de variation de X(t), c'est-à-dire que X(t) varie entre $\pm X_m$;
- sa phase (renseigne sur le déphasage entre X(t) et la grandeur excitatrice de référence (En général, la phase de la grandeur excitatrice est choisie nulle).

La grandeur X(t) étudiée est physiquement de nature réelle : il s'agit d'une tension, d'une intensité ou d'une abscisse d'un point matériel, d'un angle ...

Afin de simplifier les calculs, on introduit une grandeur complexe associée , notée avec une barre au- dessous afin d'éviter toute confusion. À la fin du raisonnement, il faut revenir à la notation réelle en prenant la partie réelle .

grandeur sinusoïdale	grandeur complexe
$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\underline{X}(t) = X_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = \underline{X}_m \exp(j\omega t)$
$e(t) = E_m \cos(\omega t)$	

III RÉSONANCE EN INTENSITÉ (OU VITESSE).

III-1) Amplitude complexe de l'intensité

Considérons un circuit RLC série comportant un générateur basses fréquences (GBF) délivrant une tension sinusoïdale de pulsation ω.

III-2) Amplitude de l'intensité

Il suffit de déterminer le module de l'amplitude complexe.

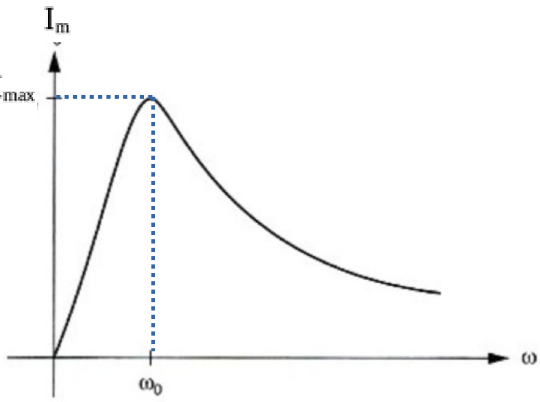
Cette amplitude tend vers zéro quand $\omega \rightarrow \infty$ ou $\omega \rightarrow 0$.

Elle est maximale lorsque le terme entre parenthèses au dénominateur s'annule.

Ainsi, l'intensité est maximale pour une pulsation de résonance égale à la pulsation propre: $\omega_r = \omega_0$. On dit alors qu'il y a résonance d'intensité.

Plus généralement, une résonance intervient lorsqu'un système physique répond de manière maximale à une excitation. La courbe donnant l'évolution de l'amplitude de l'intensité en fonction de la pulsation est tracée ici pour Q = 1.

À la résonance, l'amplitude de l'intensité est maximale et vaut I_{max} .

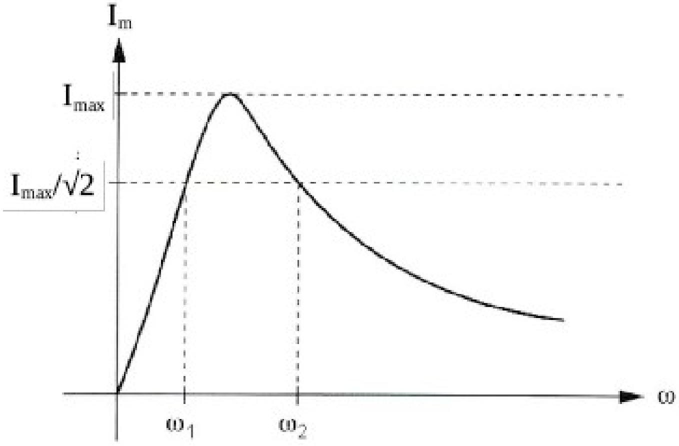


Tout se passe comme si l'inductance et le condensateur étaient absents : le générateur se comporte alors comme s'il était directement branché sur une résistance R. D'un point de vue pratique, la résonance peut poser des problèmes dans un circuit électrique vu l'intensité élevée circulant dans celui-ci.

III-3) Bande passante

On s'intéresse au domaine de fréquences dans lequel l'amplitude de l'intensité reste importante, c'est-à-dire assez proche de son maximum I_{max} . Le critère usuellement retenu pour quantifier cette bande passante est de considérer la zone de fréquences pour laquelle l'amplitude reste supérieure à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$.

On définit alors les pulsations de coupure ω_1 et ω_2.



$\omega_1 = x_1 \omega_0 =$

et $\omega_2 = x_2 \omega_0 =$

$$\boxed{\Delta x = |x_2 - x_1| = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}}}$$

Ce résultat fondamental renseigne sur le sens physique du facteur de qualité Q. Un oscillateur de facteur de qualité élevé ne réagit notablement qu'à des excitations de fréquences très proches de la fréquence de résonance f_o.

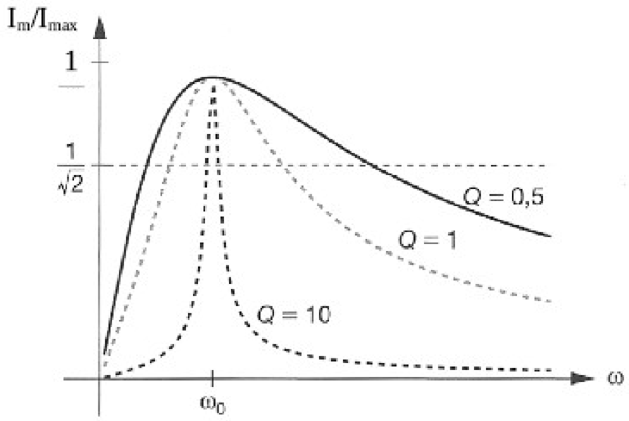
Par exemple, un résonateur à quartz (à la base du fonctionnement des montres à quartz) possède un facteur de qualité de l'ordre de Q = 10 000 : on dit que le circuit est très sélectif ou que la résonance est très aiguë.

https://couleur-science.eu/?d=3fe5fa--comment-fonctionnent-les-montres-a-quartz

En revanche, si le facteur de qualité est faible, la bande passante devient très importante.

Dans le cas d'un circuit RLC, le facteur de qualité vaut Q = 0,3 pour les valeurs : R = 1000 Ω, L = 10mH et C = 0,1µF. Cela correspond à un circuit très peu sélectif.

La forme de l'amplitude de l'intensité réduite I_m/I_{max} , (c'est-à-dire ramenée à un maximum de 1) est tracée ici en fonction de la pulsation pour les facteurs de qualité Q = 0,5, Q = 1 et Q = 10. La variation de la bande passante selon le facteur de qualité est très claire.



III-4) Phase de l'intensité

D'autres informations peuvent être données par la différence de phase $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_e$ entre l'intensité et la tension excitatrice du générateur.

Ainsi, le déphasage entre intensité et tension excitatrice est : $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_e = \arg(\underline{i}/\underline{e})$ or ici, $\varphi_e = 0$ d'où, $\Delta\varphi = \varphi_i = \arg(\underline{i})$

x	0	1	∞
Amplitude complexe $\underline{I}_m$			
tan φ			
Déphasage φ			

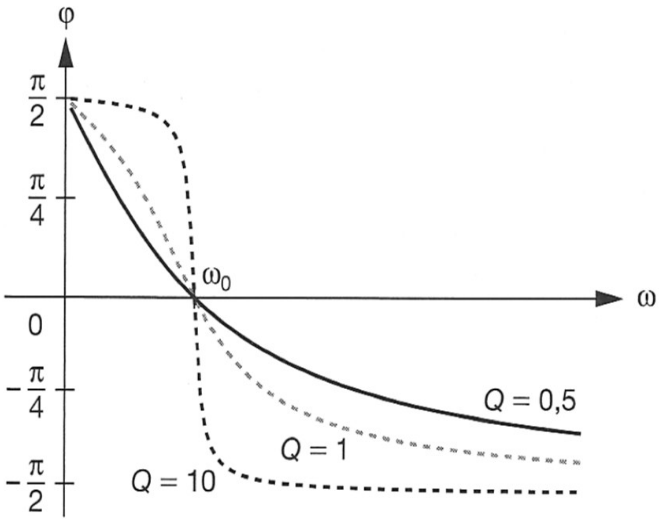
$$\underline{I}_m = I_{max} / [1 + j\,Q(x-1/x)]$$

module : $|I_m| = \dfrac{I_{max}}{\sqrt{[1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2]}}$

argument : $\varphi = -\arctan[Q(x-\frac{1}{x})] = \arctan[Q(\frac{1}{x}-x)]$

$$tan\varphi = Q(\frac{1}{x}-x)$$

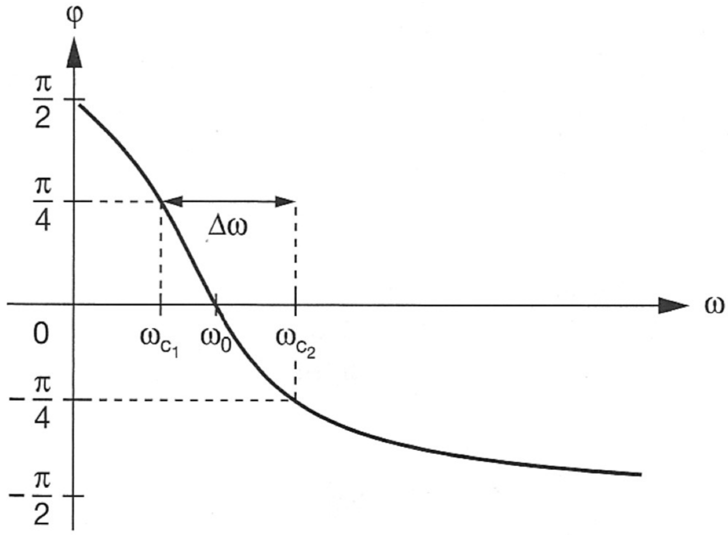
Sur la figure ci-dessous, sont tracées les variations de la phase en fonction de la pulsation pour les facteurs de qualité Q = 0,5 ; Q = 1 et Q = 10.



Pour un facteur de qualité élevé, la phase varie très rapidement au voisinage de ω_0 , et ces variations restent très localisées autour de ω_0. En revanche, pour un facteur de qualité faible, les variations sont plus lentes et réparties sur un domaine de pulsation étendu.

Les pulsations de coupure sont celles pour lesquelles l'intensité et la tension du générateur sont déphasées de +/_ π/4.

$$\boxed{\pm 1 = Q\left(x-\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow tan(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{4}}$$



IV-5) Résonance en vitesse

Reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique amorti en mécanique auquel on ajoute une force excitatrice .

L'équation différentielle s'écrit :

La résonance en intensité est l'analogue de la résonance en vitesse. La résonance en charge (ou en tension aux bornes du condensateur) sera l'analogue de la résonance en élongation.

$$\underline{V_m} = \frac{V_{max}}{[1 + jQ(x - \frac{1}{x})]}$$

module : $|\underline{V_m}| = V_{max}/[1 + Q^2(x - 1/x)^2]^{1/2}$ et

argument : $\varphi = - \arctan[Q(x - 1/x)] = \arctan[Q(1/x - x)] = \varphi_v - \varphi_f$

avec $Q = m\omega_0/h = (k/\omega_0^2).(\omega_0/h) = k/(\omega_0 h)$

$\omega_0^2 = k/m$ d'où : $m = k/\omega_0^2$

$x = \omega/\omega_0$

IV – RESONANCE EN TENSION AUX BORNES DU CONDENSATEUR (OU EN ELONGATION)

IV-1) Equation canonique

En mécanique on a : $f(t) = m\, d^2x/dt^2 + h\, dx/dt + k\, x$ avec $x = l - l_0$.

En électricité on a : $e(t) = L\, d^2q/dt^2 + R\, dq/dt + q/C$

Ces deux équations peuvent se mettre sous la forme (forme canonique):

$d^2X/dt^2 + \omega_0/Q.\, dX/dt + \omega_0^2 X = A_m \cos(\omega t)$ avec $A_m = F_m/m$ ou $A_m = E_m/L$

En notation complexe on obtient :

IV-2) Résonance d'élongation

Étudions dans un premier temps les variations de l'amplitude X_m des oscillations en fonction de la pulsation pour une force excitatrice d'amplitude F_m fixée.

On cherche donc le module de l'amplitude complexe :

On remarque déjà qu'à pulsation très élevée, l'amplitude $X_m = |\underline{X}_m|$ des oscillations tend vers 0. En revanche, à pulsation nulle, $X_m = F_m/m\omega_0$.

Il reste à savoir, dans quelles conditions la courbe passe par un maximum.

Elle passe par un maximum si le dénominateur est minimum c'est-à-dire si:

$$-4x(1-x^2)+\frac{2x}{Q^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(1-x^2)=\left(\frac{1}{Q}\right)^2 \Leftrightarrow x^2=1-\frac{1}{2Q^2}$$

$$\Leftrightarrow \omega_r=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}>0 \text{ ssi } Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

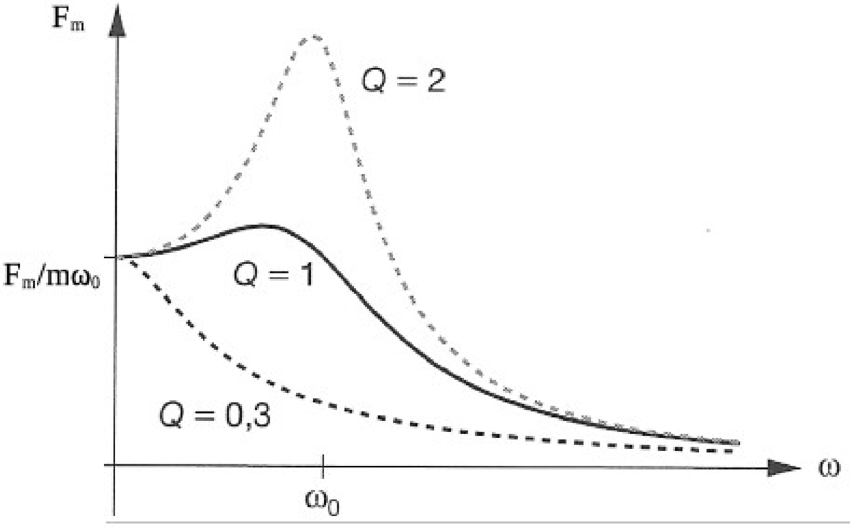
La résonance d'élongation n'existe que pour les oscillateurs mécaniques de facteur de qualité suffisamment élevé, contrairement à la résonance d'intensité dont l'existence est systématique.

Une autre différence avec la résonance d'intensité est la valeur de la pulsation de résonance. Celle-ci est donnée, quand elle existe, par :

$$\boxed{\omega_r=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}>0 \text{ ssi } Q>\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Elle est donc forcément différente de la pulsation propre ω_0.

Similairement au cas de la résonance d'intensité, un facteur de qualité élevé se traduit par une acuité de la résonance autour de la pulsation de résonance. On peut le constater sur la figure ci-dessous.



En général, il est préférable d'éviter la résonance d'élongation dans les systèmes physiques.

Dans un amortisseur de véhicule (modélisable par un système ressort-masse), la résonance d'élongation n'est pas souhaitable. La réponse à une excitation, liée par exemple à une irrégularité de la route, devient importante au voisinage d'une certaine fréquence. L'amplitude des oscillations peut alors être élevée, ce qui est gênant pour les passagers. Il faut se débrouiller pour supprimer la résonance ou plus vraisemblablement repousser la fréquence de résonance en dehors du domaine d'excitation .

Les résonances sont aussi à éviter sur les ponts. Des oscillations de grande amplitude peuvent créer de gros dégâts.

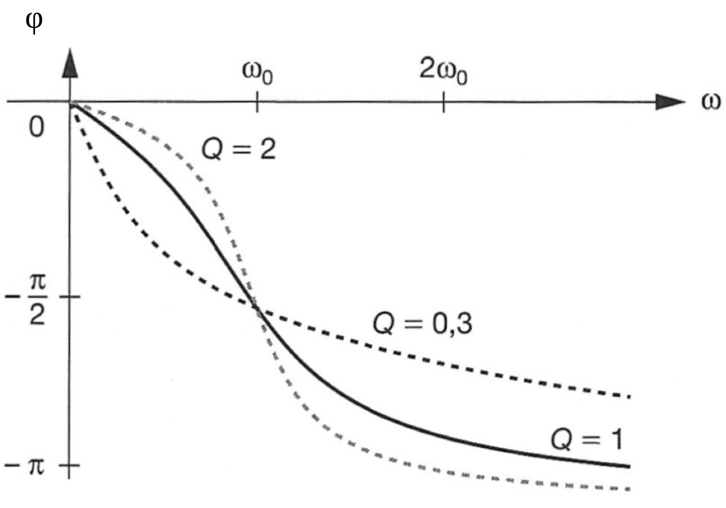
Les grandes tours peuvent être assimilées à un oscillateur mécanique amorti. L'excitation peut être due au vent ou à une secousse sismique.

Dans un circuit RLC, la tension aux bornes du condensateur peut, à la résonance , conduire à sa destruction (claquage).

IV-3) Phase de l’élongation

L'étude du déphasage entre l'élongation et la force excitatrice permet d'obtenir des informations complémentaires.

x	0	1	∞
Amplitude complexe $\underline{X}_m$	$F_m/(m\omega_0^2)$	$QF_m/(jm\omega_0^2)$	$- F_m/(x^2m\omega_0^2) \rightarrow 0$
tan φ	0	- ∞	0
Déphasage φ	0	- π/2	- π



À la résonance d'élongation, le déphasage ne possède pas de valeur remarquable, contrairement à la pulsation propre pour laquelle il vaut : - π/2

L'influence du facteur de qualité est la même que pour la résonance d'intensité.

PLAN