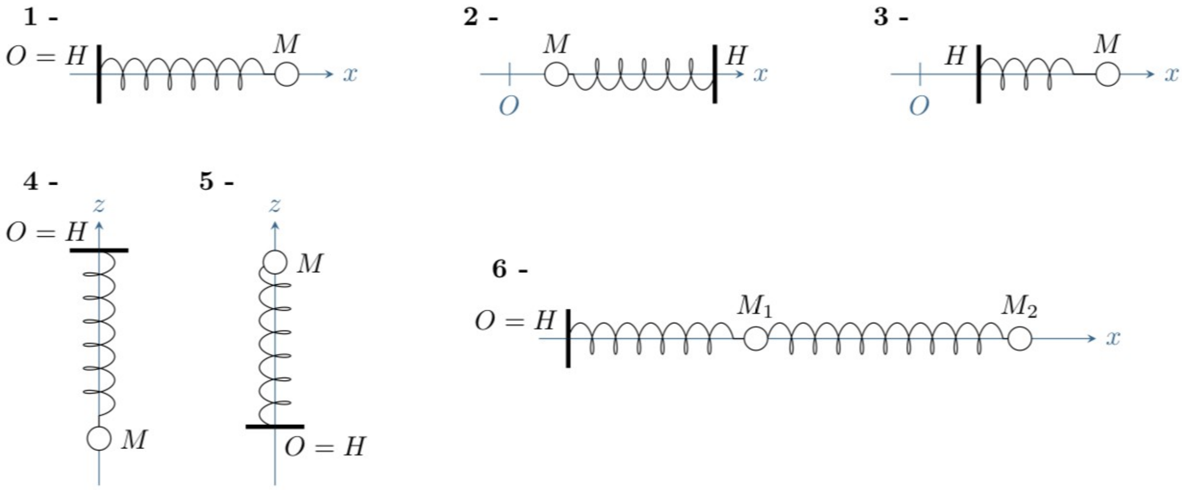
Exercices : oscillateurs harmoniques

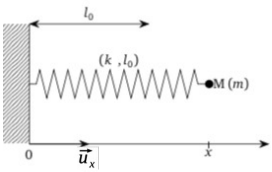
Exercice n°1

Dans chacun des cas, exprimer la force exercée par le ressort sur le solide fixé en M en fonction de la raideur k et de la longueur à vide l_0 du ressort, de la position x ou z du point M, de la position x_H ou z_H du point H où le ressort est fixé à un bâti, et du vecteur unitaire $\vec{u}_x$ ou $\vec{u}_z$. Les positions sont repérées à partir du point O. Dans le dernier cas, exprimer les forces exercées par les deux ressorts sur chacun des points M_1 et M_2, d'abscisses x_1 et x_2. Les deux ressorts sont supposés différents, de caractéristiques k, l_0 et k′, l'_0.

Indication: déterminer au préalable la longueur du ressort et le vecteur unitaire sortant du ressort.



Exercice n°2 *Ressort horizontal*



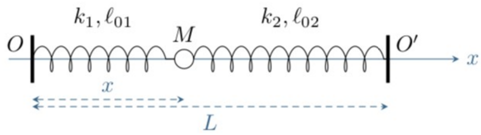
On considère le système constitué d'un ressort horizontal dont une extrémité est fixe dans le référentiel d'étude et l'autre est accrochée à une masse ponctuelle m astreinte à se déplacer selon un axe horizontal parallèle à l'axe Ox.

La raideur du ressort est notée k, sa longueur à vide l_0. On négligera tout frottement.

1. Démontrer l'expression de l'équation différentielle que vérifie la position x du point M de masse m.
2. Identifier la pulsation propre du système dans l'équation différentielle. Rappeler son unité.
3. Résoudre l'équation précédente en prenant pour conditions initiales $x(t=0)= l_0$ et $v(t=0)=v_0$.
4. Dans votre expression, identifier l'amplitude et la période propre T_0 des oscillations. Donner l'expression de la fréquence propre f_0 des oscillations.

Exercice n°3 Deux ressorts

Considérons un point matériel M de masse m glissant horizontalement et sans frottement, repéré par son abscisse x telle que $\overrightarrow{OM} = x\ \vec{u}_x$. Ce solide est relié à deux ressorts placés sur un même axe, eux-mêmes fixés en O et O' . Le solide étudié se trouve entre O et O′. La longueur OO′ est notée L. Les ressorts ont pour raideur respective k_1 et k_2, et pour longueur à vide l_{01} et l_{02}.



1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par x(t), appelée équation du mouvement.

2 - Montrer que la position d'équilibre est donnée par: $x_{\text{éq}} = \dfrac{k_1\ell_{01} + k_2(L - \ell_{02})}{k_1 + k_2}$

3 - En déduire la forme générale des solutions de l'équation du mouvement.

4 - Supposons qu'à l'instant t = 0, M est placé en $x = x_0 > x_{éq}$ et lancé avec une vitesse initiale v_0 vers la gauche. Établir la loi horaire x(t) et représenter son allure.

Exercice n°4 Ressort vertical

L'oscillateur est un ressort *vertical* de longueur à vide l_0 et de raideur k. Ce ressort est attaché à une ficelle en un point O supposé fixe et pend verticalement. Un cylindre de masse m est fixée à son autre extrémité. La position du cylindre est repérée par sa côte z, définie le long d'un axe (Oz) orienté vers le bas et dont l'origine est fixée au point d'attache du ressort.

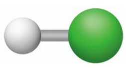
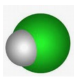
1-Établir l'équation différentielle vérifiée par z(t) et l'écrire sous forme canonique. En déduire la période des oscillations et comparer au cas horizontal.

2-Déterminer la position d'équilibre $z_{éq}$. Commenter physiquement le résultat.

3 - Le cylindre est lâché sans vitesse initiale à partir d'une position z_0 obtenue en étirant le ressort par rapport à la position d'équilibre. Déterminer la loi horaire z(t).

4 - L'énergie potentielle du cylindre peut s'écrire sous la forme : $E_p(z) = 1/2\ k(z - l_o)^2 - mgz$.

Que représentent chacun des termes?

Exercice n°5  

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est mesurée par spectroscopie comme valant $f = 8{,}5 \cdot 10^{13}$ Hz. On aborde dans cet exercice un premier modèle simple de la molécule, décrite comme un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe. L'interaction entre les deux atomes est modélisée par un ressort de raideur k. *Données :* masses molaires $M_H = 1{,}0\ g \cdot mol^{-1}$ et $M_{Cl} = 35{,}5\ g \cdot mol^{-1}$, nombre d'Avogadro $N_A = 6{,}0 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$.

1 - Pourquoi est-il raisonnable de supposer l'atome de chlore fixe ?

2 - Calculer la raideur k.

3 - On admet que l'énergie de la molécule est égale à $\dfrac{1}{2}hf$ où $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s est la constante de Planck. Calculer la vitesse maximale de l'atome d'hydrogène.

4 - Calculer l'amplitude de son mouvement (allongement: $l_{max} - l_o$).