S7 : Filtrage linéaire

Filtrage linéaire Signaux périodiques. Fonction de transfert harmonique. Diagrammes de Bode.	Identifier sur le spectre d'un signal périodique la composante continue, le fondamental et les harmoniques. Définir la valeur moyenne d'un signal et sa valeur efficace. Prévoir le comportement d'un filtre en hautes et basses fréquences. Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode fournis d'après l'expression de la fonction de transfert. **Mettre en œuvre un dispositif illustrant la fonction de filtrage d'un système linéaire.**
Modèles simples de filtres passifs: passe-bas et passe-haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	*Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée. Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).* **Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.** *Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.*

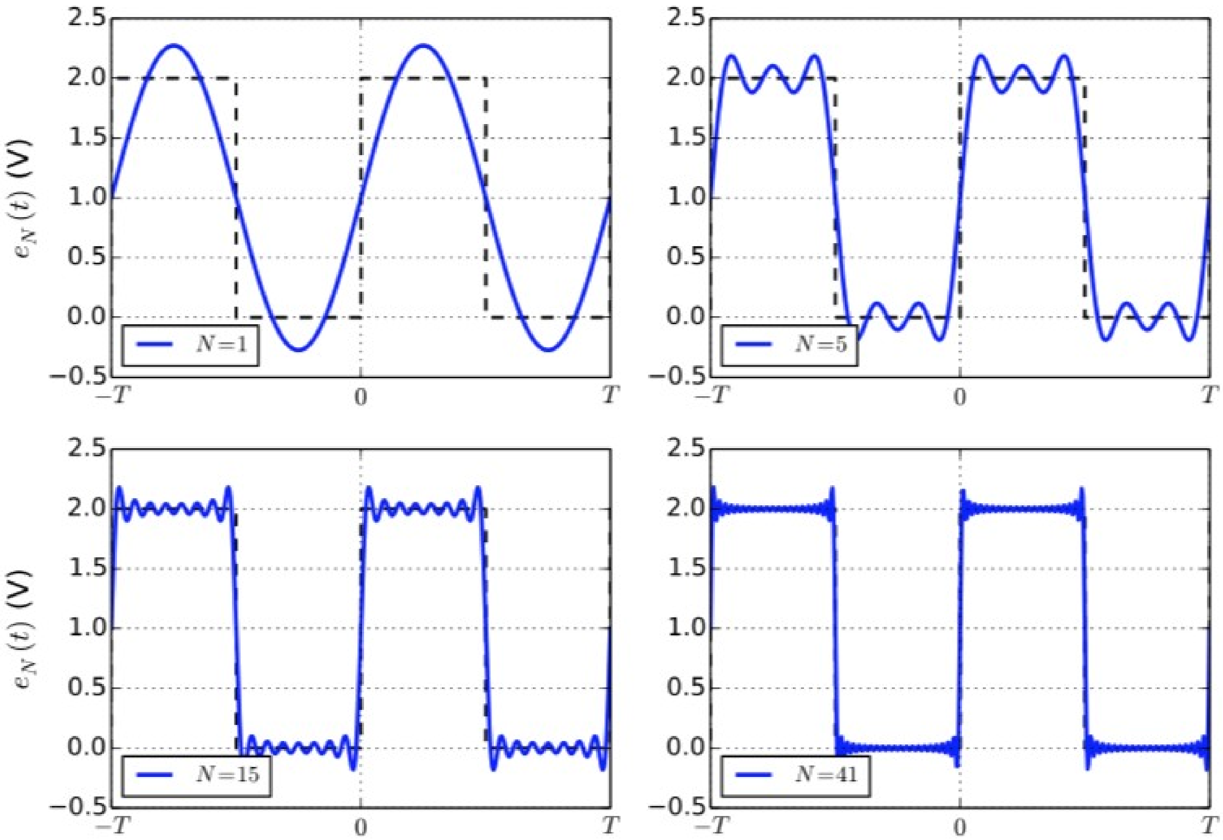
I SIGNAUX PERIODIQUES

I.1 Décomposition en série de Fourier

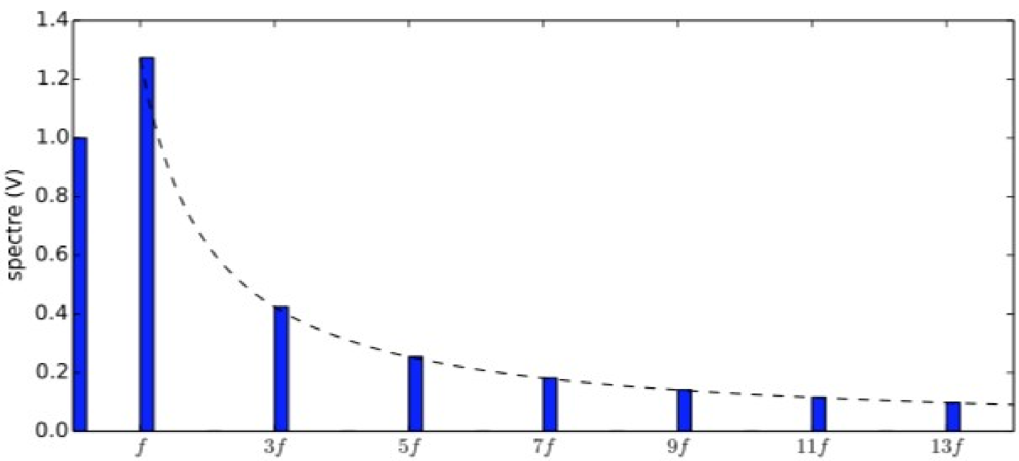
Exemple du signal créneau :

$$e_N(t) = 1 + \sum_{n=1}^{N} 2\frac{1+(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(n \times 2\pi \frac{t}{T}\right)$$

Le premier terme de la somme représente la valeur moyenne du signal. En sommant des sinus dont la fréquence est multiple de la fréquence fondamentale $f = \frac{1}{T}$, avec des coefficients bien choisis, on constate qu'avec suffisamment de termes on finit par reproduire un signal créneau de moyenne 1 V, d'amplitude 1 V et de même période que le fondamental.



Dans le cas de ce signal, seuls les harmoniques impairs sont non nuls et leur amplitude décroît comme 1/n . Le spectre de ce signal créneau de moyenne non nulle a donc l'allure suivante :



Joseph FOURIER (1768 - 1830) : mathématicien et physicien français. Il résout les équations de diffusion de la chaleur en mettant au point la décomposition d'une fonction quelconque en une série trigonométrique convergente (série de Fourier).

Cet outil universel est notamment à la base de la théorie du signal développée au 20ème siècle.

Généralisation

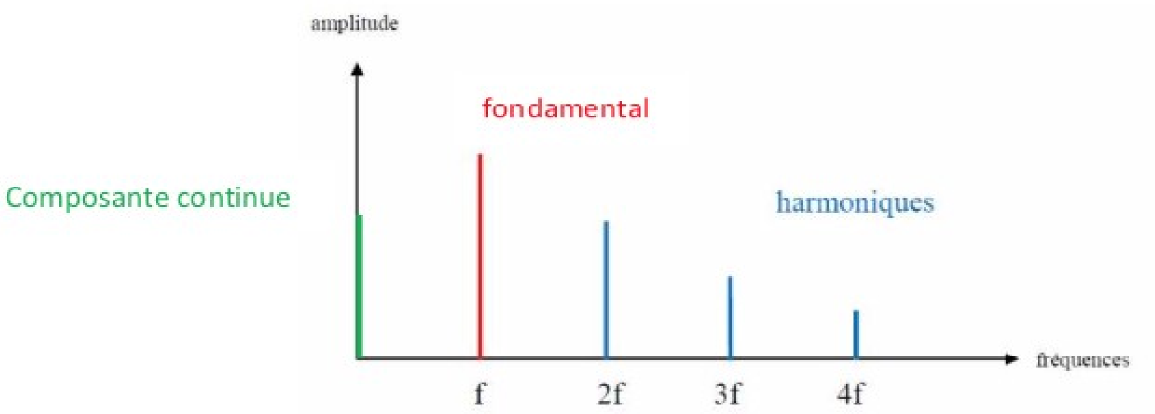
Tout signal périodique de pulsation ω est la somme de fonctions sinusoïdales de pulsations ω, 2ω, 3ω ... et éventuellement d'une constante, la composante continue ou valeur moyenne.

On peut ainsi écrire tout signal y(t) périodique de période T comme une somme de signaux sinusoïdaux de pulsations $\omega_n = 2\pi \frac{n}{T}$ par la relation : $y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$

- a_0 représente la valeur moyenne du signal ;
- le fondamental est associé au terme de rang n = 1 ;
- les termes suivants constituent les harmoniques de rang n.

Le spectre du signal est l'ensemble des composantes de sa décomposition en série de Fourier .

On le représente par un diagramme en bâtons donnant les amplitudes (ou l'amplitude et la phase) en fonction des pulsations n ω ou des fréquences n f.



La composante continue du signal correspond à f = 0 (fréquence nulle).
La composante fondamentale donne de la fréquence du signal.
Les harmoniques sont de fréquences multiples de celle de la fondamentale

https://youtu.be/xP_cH5RZESU (rappel de terminale)

Une sinusoïde est décrite par **une seule** composante fréquentielle : le fondamental. **Le signal est dit monochromatique.**

I.2 Caractéristiques d'un signal périodique

Valeur moyenne, valeur efficace

Définitions

Soit s(t) un signal périodique, on définit :

sa valeur moyenne : $< s(t) > T = \int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t$

représente l'aire sous la courbe sur une période

sa valeur efficace notée : $$\boxed{s_{\text{eff}} = \sqrt{< s^2(t) >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\mathrm{d}t} \quad \forall t_0}$$

Un signal sinusoïdal a une valeur efficace qui est son amplitude divisée par $\sqrt{2}$.

Exemple : signal sinusoïdal

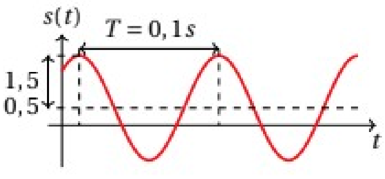
Considérons un signal sinusoïdal de la forme e(t) = E cos (ω t) avec ω = 2πf = 2π/T.

Calculer sa valeur moyenne et sa valeur efficace.

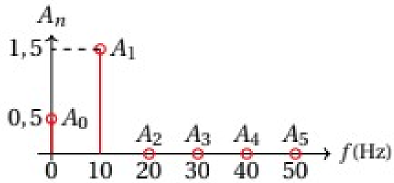
Cette valeur efficace est fondamentale. C'est cette valeur qu'affichent les multimètres numériques en mode alternatif. le facteur « √2» ne s'applique qu'au cas du signal sinusoïdal. Les « 220 V » du réseau de distribution d'électricité correspondent à la valeur efficace de la tension.

Rappel: un signal sinusoïdal n’est constitué que de sa composante continue et de son fondamental.

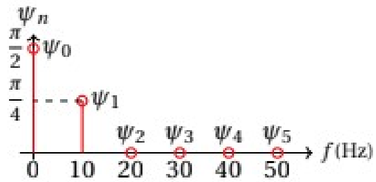
Pour le signal $s(t) = 0,5 + 1,5 \times \sin(2\pi \times 10 \times t + \boxed{\frac{\pi}{4}})$, on a les représentations suivantes:



Représentation temporelle de $s(t)$

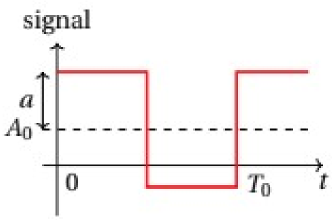


Spectre des amplitudes

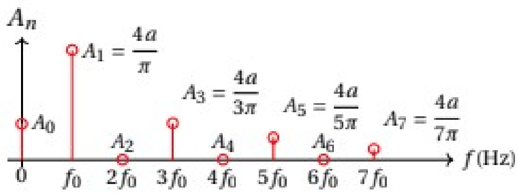


Spectre des phases

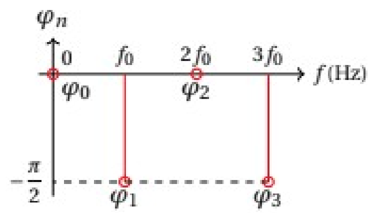
Pour le signal créneau (description avec des fonctions cos) :



Représentation temporelle



Spectre des amplitudes



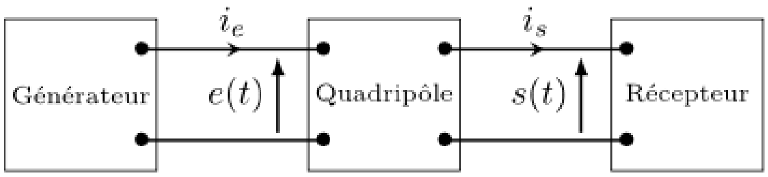
Spectre des phases

Exprimer dans ce cas, s(t).

II FONCTION DE TRANSFERT. DIAGRAMME DE BODE.

II.1 Notion de filtre, fonction de transfert

Un filtre est un quadripôle qui ne transmet que les signaux dont la fréquence appartient à un intervalle appelé bande-passante et bloque les signaux dont la fréquence est en dehors (la bande rejetée).



$e(t) = U_e \cos(\omega t + \varphi_e)$ (souvent $\varphi_e = 0$ est pris comme référence).

$s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi_s)$

La fonction de transfert complexe d'un filtre linéaire est une fonction de la pulsation ω (ou de la fréquence f) définie par :

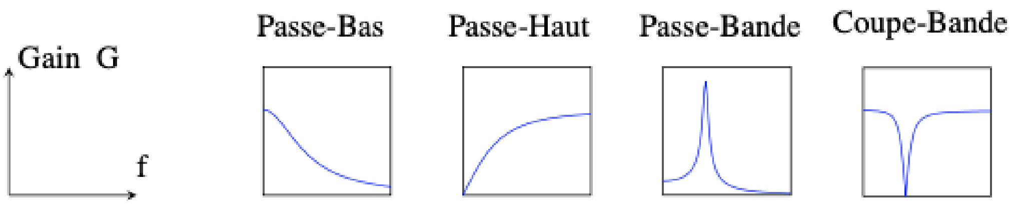
$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}}$$

$G = |\underline{H}(j\omega)| = |\underline{u}_s| / |\underline{u}_e| = U_s/U_e$: le gain du filtre.

$\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \arg\{\underline{H}(j\omega)\}$: la phase

On parle souvent du **gain en décibel** d'un filtre : $G_{dB} = 20 \log(G)$ $\leftrightarrow$ $G = 10^{(GdB/20)}$

II.2 Principaux types de filtre



Filtre passe-bas : Il laisse passer les basses fréquences. Bande passante : $[0, \omega_c]$

Filtre passe-haut : Il laisse passer les hautes fréquences. Bande passante : $[\omega_c, +\infty[$

Filtre passe-bande : Il ne laisse passer qu'une bande de fréquences compris entre deux fréquences de coupure. Son gain est maximal pour une pulsation dite pulsation de résonance ω_r. Le facteur de qualité décrit la capacité du filtre à sélectionner une fréquence. Il représente le rapport entre la pulsation de résonance et la largeur de la bande passante. Bande passante : $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$
Filtre coupe-bande : Il atténue une plage de fréquences. Bandes passantes : $]-\infty, \omega_{c1}]$ $[\omega_{c2}, +\infty[$
Les filtres passe-bande et coupe-bande sont au moins du second ordre.

II.3 Gain en décibel et diagramme de Bode

Pour le diagramme de Bode, on trace :

$$G_{dB} = f(\log x) \quad \text{avec } x = \omega/\omega_0 : \text{diagramme de Bode en gain ;}$$

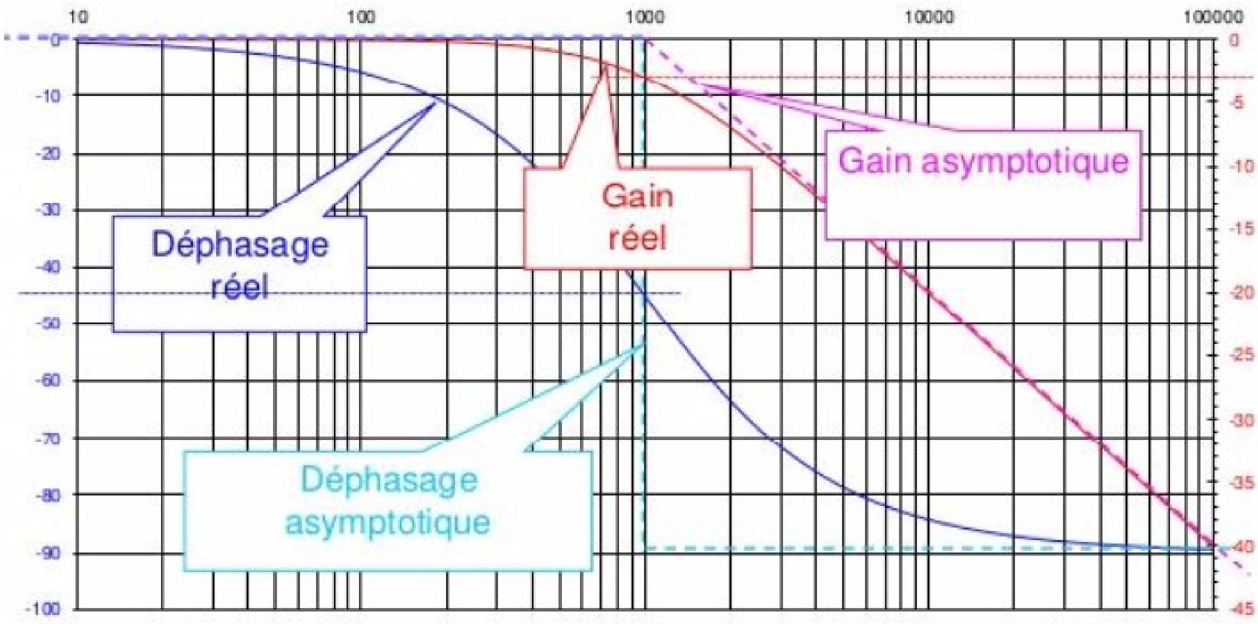
$$\varphi = g(\log x) \quad \text{avec } x = \omega/\omega_0 : \text{diagramme de Bode en phase.}$$

On définit enfin ω_c, la pulsation de coupure à −3dB, telle que :

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dBmax} - 3 \quad \text{ce qui équivaut à } G(\omega_c) = G_{max} / \sqrt{2}$$

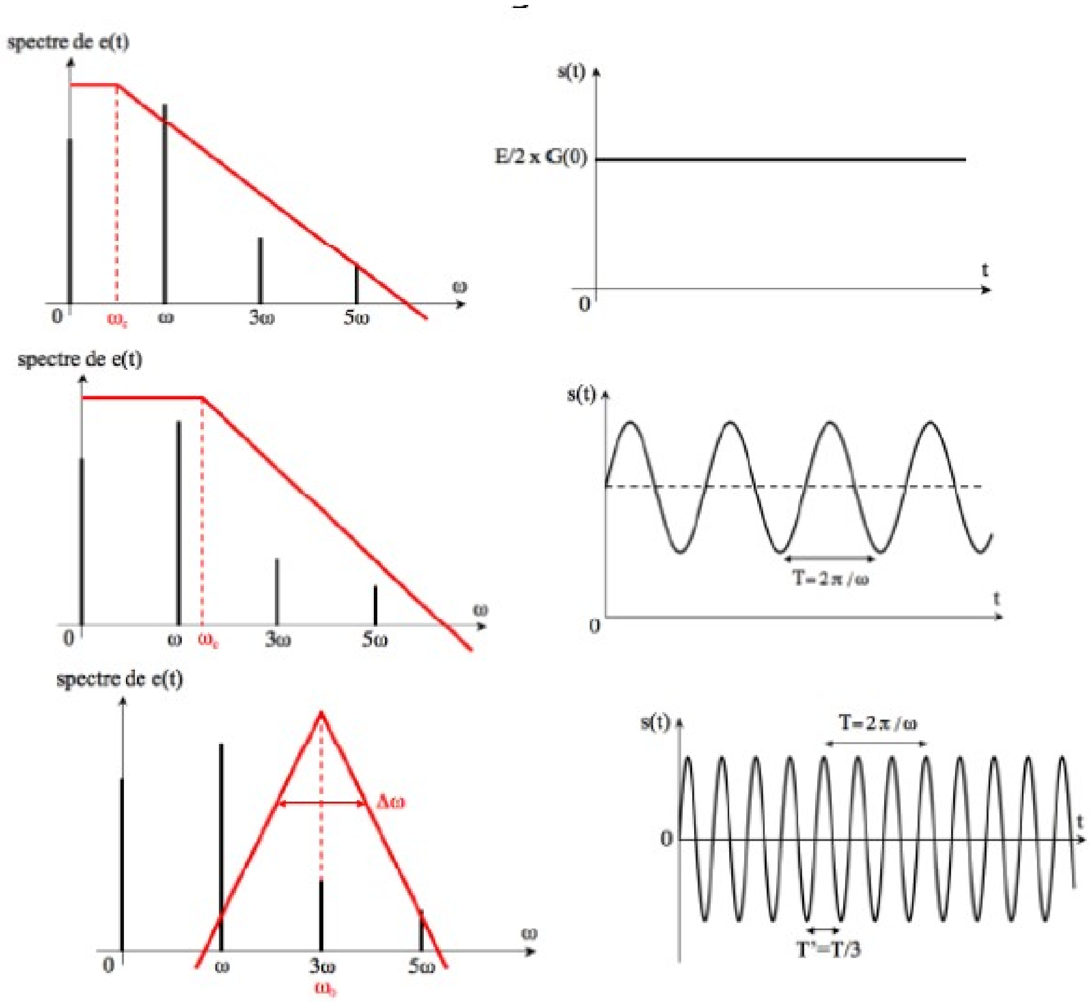
Justification :

Gain et déphasage

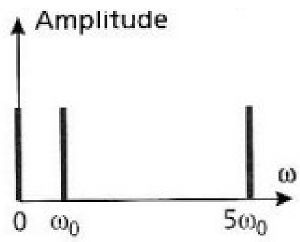


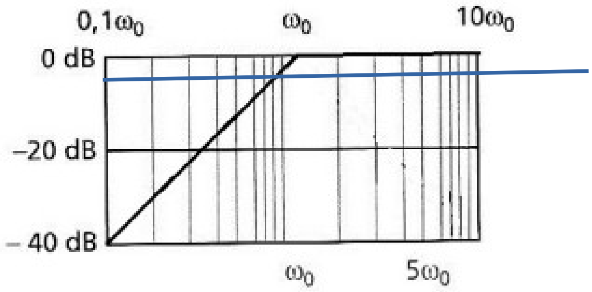
fréquence

La superposition du diagramme de Bode et du spectre du signal d’entrée permet de se faire une idée sur le signal de sortie.



Déterminer le signal de sortie

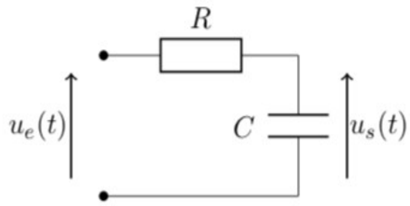




Signal **filtre**

III ETUDE DE FILTRES CLASSIQUES

III.1 Filtre passe-bas du premier ordre

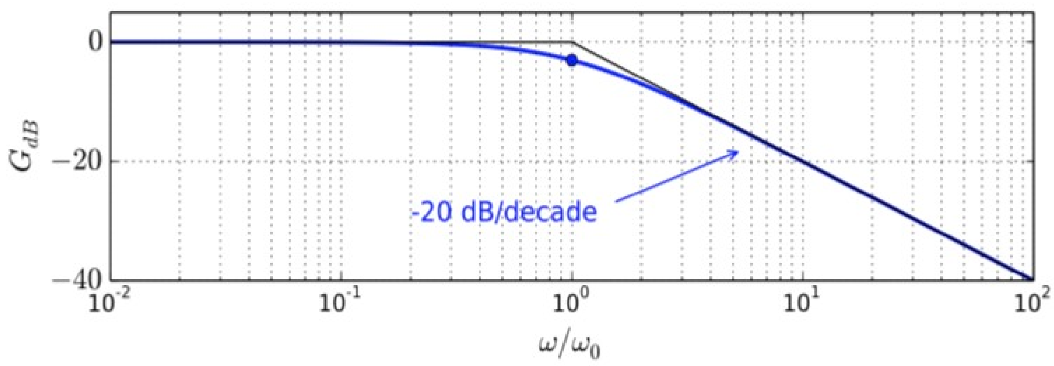


Comportement asymptotique

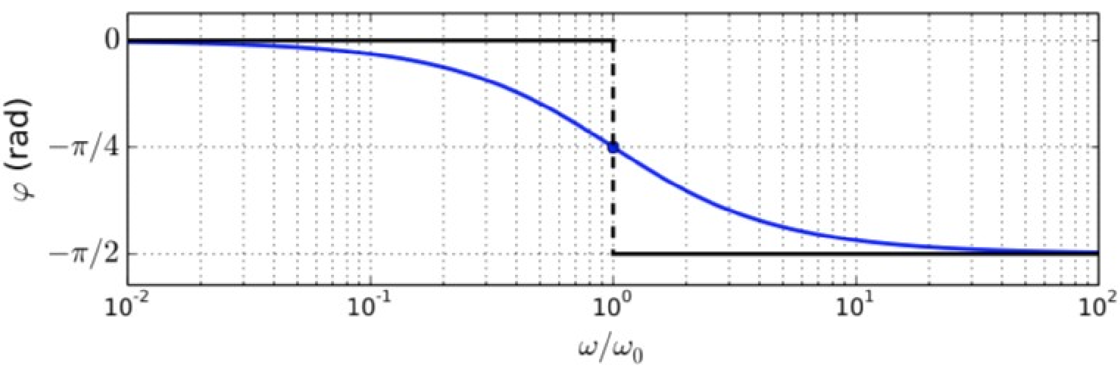
Fonction de transfert

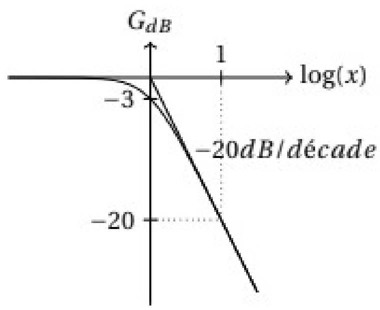
Diagramme de Bode

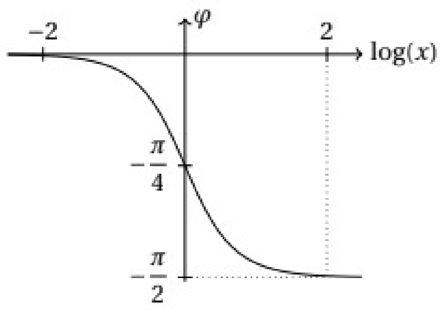
Gain en décibel :


G_{dB}
0
-20
-40
-20 dB/decade
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
ω/ω_0

Déphasage :


φ (rad)
0
$-\pi/4$
$-\pi/2$
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
ω/ω_0

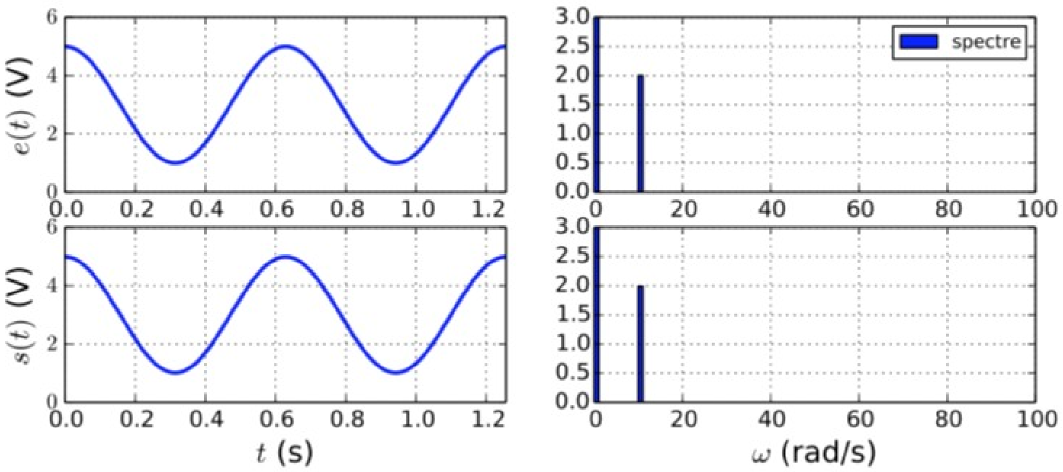

G_{dB}
1
$\log(x)$
-3
$-20dB/décade$
-20


φ
-2
2
$\log(x)$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$

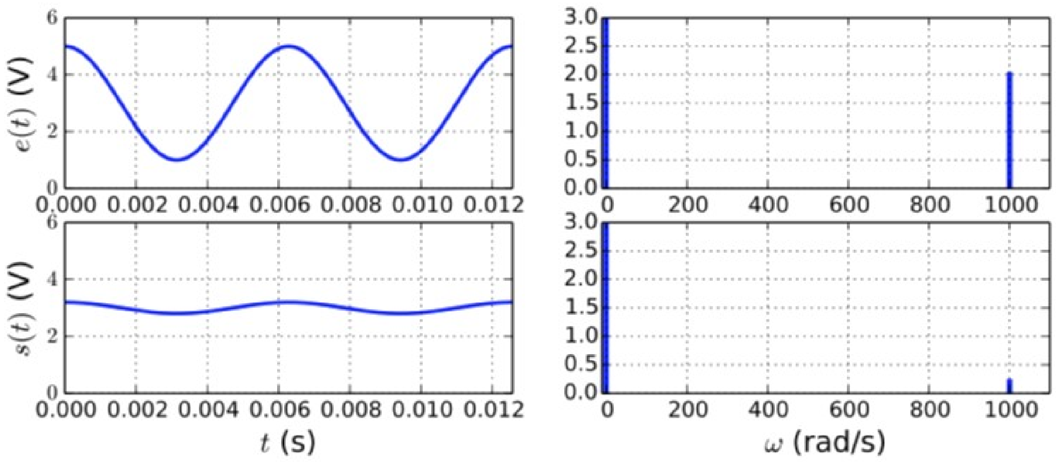
Action du filtre sur un signal électrique

On considère le filtre RC précédemment étudié avec $\boldsymbol{\omega_c = 100}$ **rad.s^{-1}.**

On impose en entrée du filtre le signal : **e(t) = 3 + 2 cos (ωt)** et on observe le signal en sortie, avec ω successivement égale à **10 rad.s^{-1}** :



et **1, 0 × 10^3 rad.s^{-1}** .



Le signal de sortie a pour expression :

Cas 1 : pour $\omega = \omega_c/10$, le signal de sortie est quasiment identique au signal d'entrée.

$$s(t) = 3 + \frac{2}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}} \cos\left(\omega t + \varphi(\omega)\right)$$

Cas 2 : pour $\omega = 10 \times \omega_c$, la composante sinusoïdale est très atténuée en sortie du filtre, le signal de sortie se limite quasiment à sa composante continue.

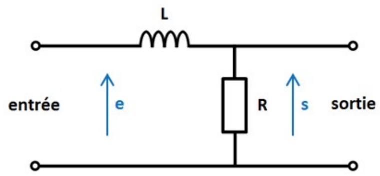
Remarques importantes :

$\underline{H}(j\omega) = 1/[1 + j\,(\omega/\omega_0)\,]$ lorsque $\omega >> \omega_0$, tend vers $1/\ j\,(\omega/\omega_0)$ d'où $\underline{u}_s = 1/(j\omega)\,.\omega_0\,\underline{u}_e$

Or multiplier par 1/(jω) la tension d'entrée, équivaut à intégrer celle-ci.

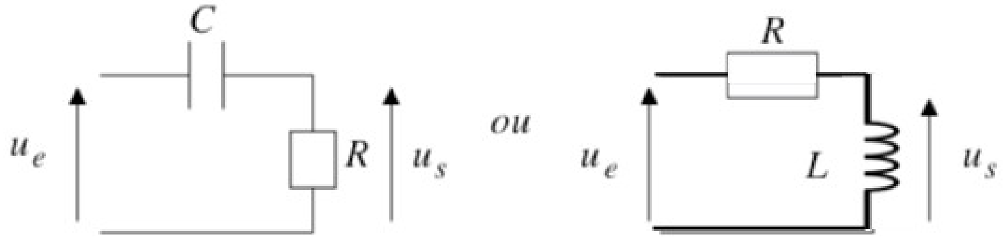
Un filtre passe pas du premier ordre se comporte en intégrateur pour tout signal de pulsation très supérieure à la pulsation de coupure du filtre.

Circuit du passe bas du premier ordre analogue :



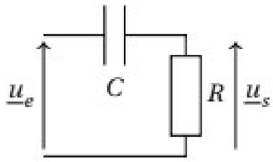
III.2 Filtre passe-haut du premier ordre

Exemples de montage



..

Comportement asymptotique

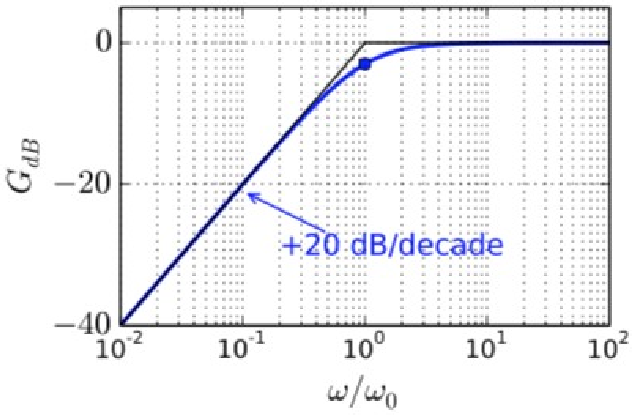


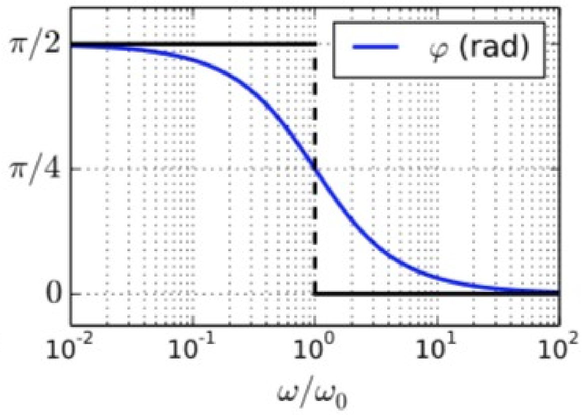
Fonction de transfert

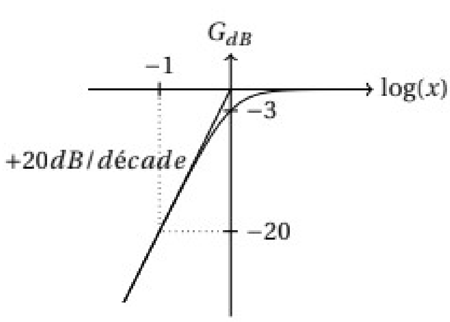
Diagramme de Bode

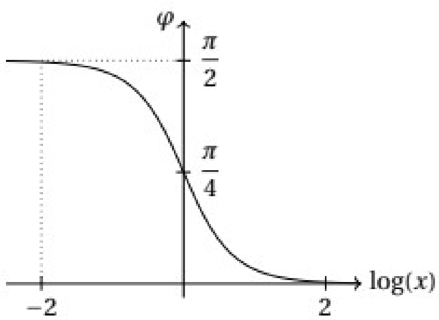
Gain en décibel :

Déphasage :









Remarque importante :

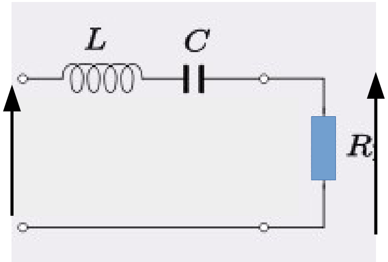
$\underline{H}(j\omega) = j\,(\omega/\omega_0)\,/[1 + j\,(\omega/\omega_0)\,]$ lorsque $\omega << \omega_0$, tend vers $j\,(\omega/\omega_0)$ d'où $\underline{u}_s = (j\omega)\,.\omega_0\,\underline{u}_e$

Or multiplier par (jω) la tension d'entrée, équivaut à dériver celle-ci.

Un filtre passe haut du premier ordre se comporte en dérivateur pour tout signal de pulsation très inférieure à la pulsation de coupure du filtre.

III.3 Filtre RLC passe bande

Impossible à réaliser avec seulement deux dipôles. On prend un circuit RLC et on regarde la tension aux bornes de R.



Comportements limites :

HF bobine = coupe-circuit donc i = 0 et $u_R = 0$.

BF, idem mais avec condensateur.

Fonction de transfert :

Il s'agit d'un filtre **du second ordre** puisque le dénominateur est un polynôme d'ordre 2.

Diagramme de Bode en gain :

$G_{dB}(x \ll 1) \simeq 20\log x - 20\log Q$, donc pente positive à + 20 dB/décade;

$G_{dB}(x \gg 1) \simeq -20 \log x - 20 \log Q$, donc pente négative à - 20 dB/décade .

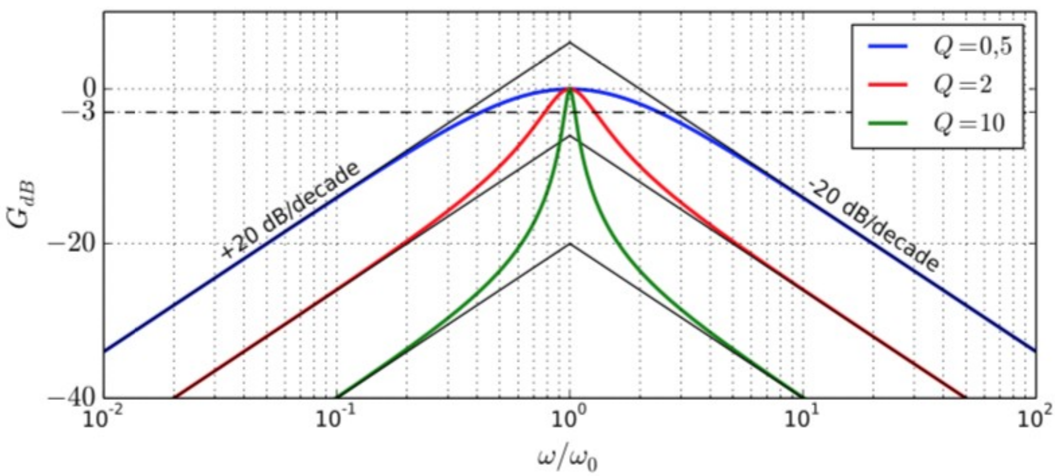
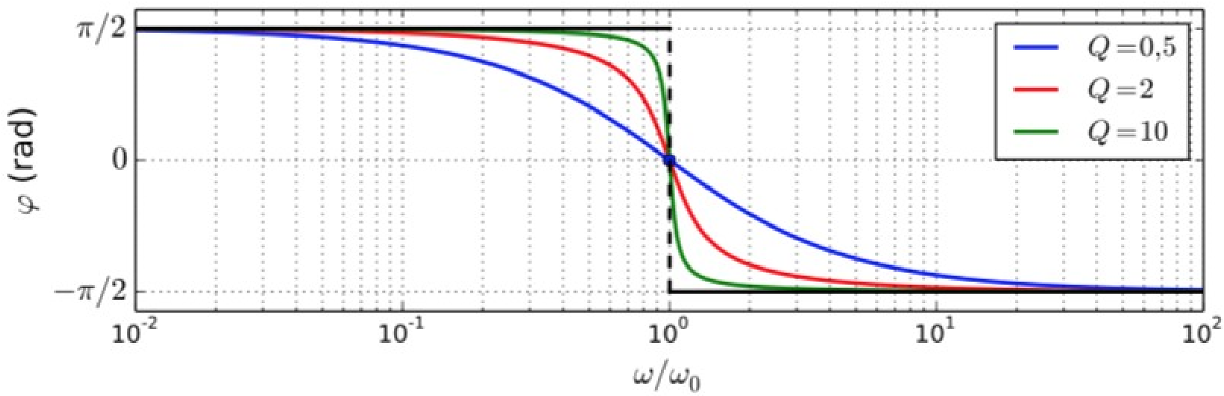
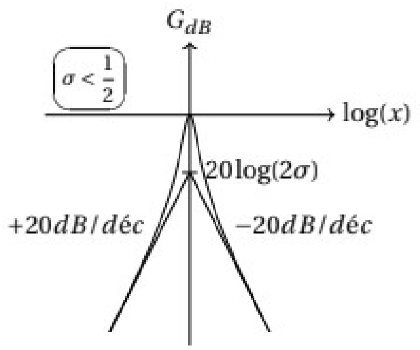
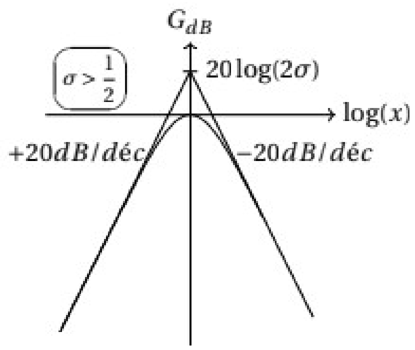
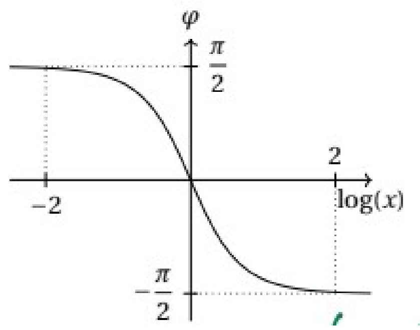


Diagramme de Bode en phase :





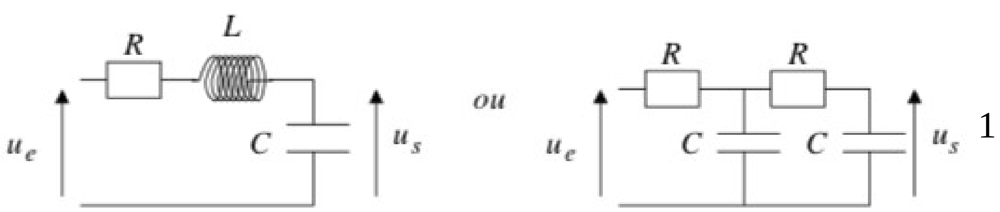




σ = 1/2Q.

III.4 Filtre passe-bas du deuxième ordre

On peut alors réaliser un filtre passe-bas du second ordre, soit en associant plusieurs filtres du premier ordre, soit directement, par exemple avec la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC série.



Comportement limite :

HF, le condensateur est équivalent à un fil, donc s(t) → 0,

BF, le condensateur est équivalent à un coupe-circuit, on trouvera bien s(t) → e(t).

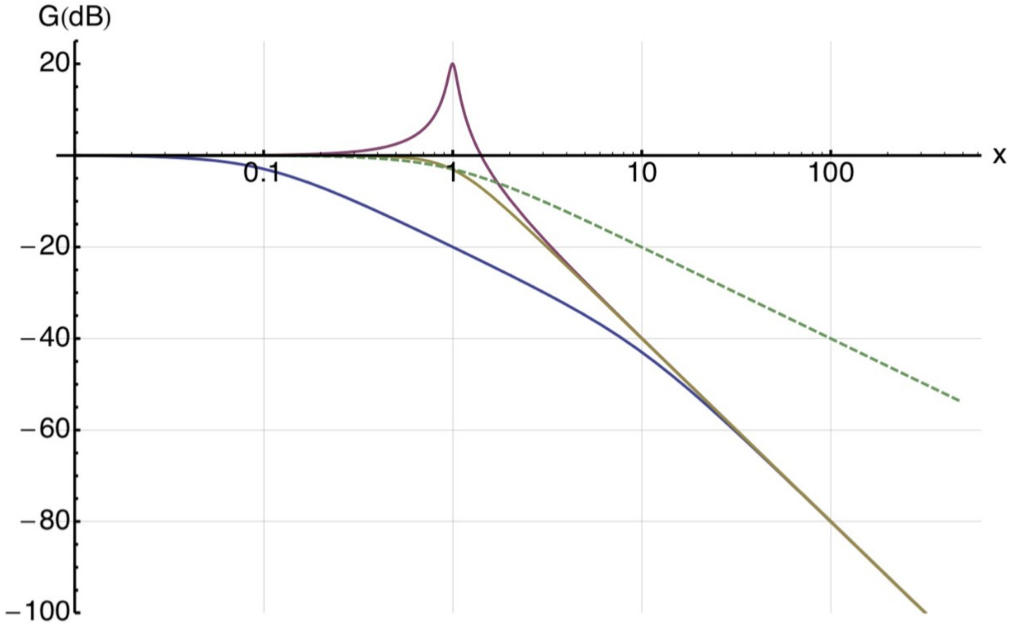
Fonction de transfert :

On a donc bien réalisé un filtre du second ordre.

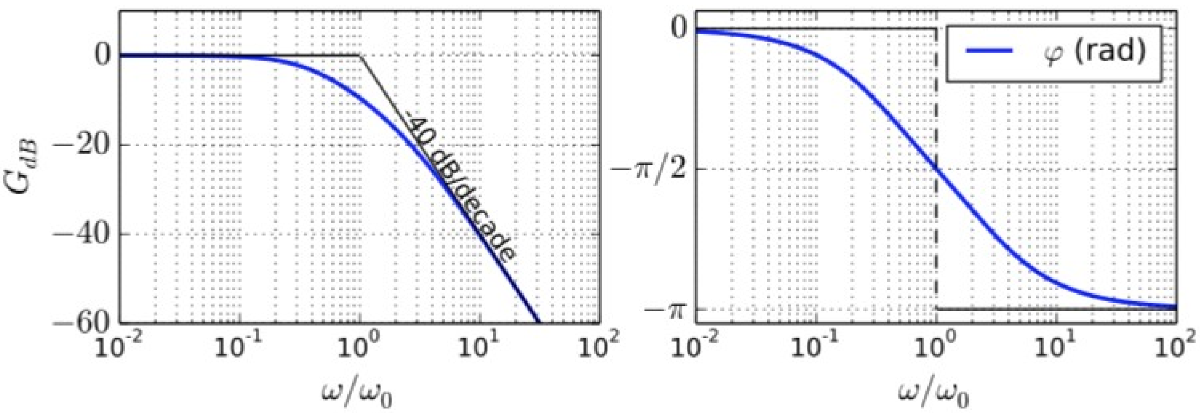
Diagramme de Bode en gain :

Diagramme de Bode en phase :

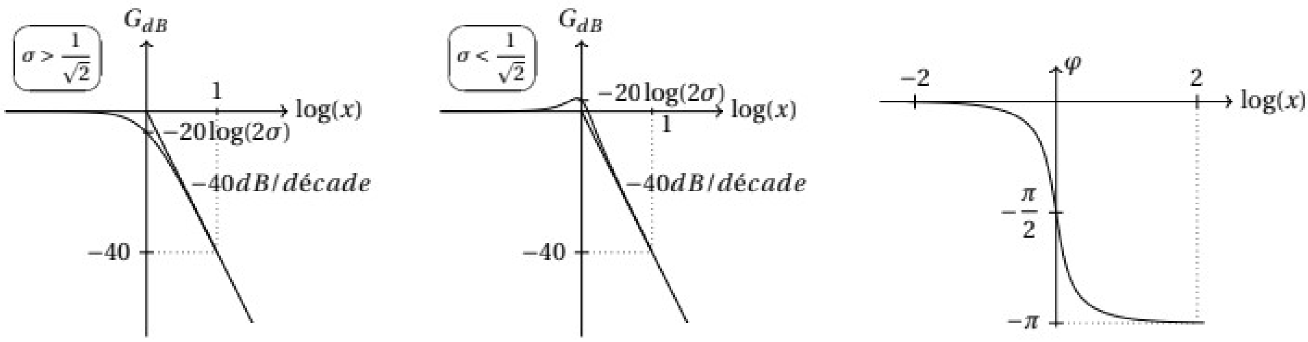
$G_{dB}(x = 1) = 20 \log Q$. Ainsi, lorsque $Q > 1$, $G_{dB}(x = 1) > 0$, on a réalisé un filtre **résonant**. En pratique, on va la plupart du temps vouloir éviter cette résonance pour avoir une courbe qui ressemble à un filtre passe-bas du premier ordre pour les basses fréquences (réponse plate aux basses fréquences) avec une décroissance plus rapide aux hautes fréquences.



La courbe bleue correspond à un facteur de qualité de 0,1, la courbe ocre à un facteur de qualité de $1/\sqrt{2} \simeq 0{,}7$ et la courbe rouge à un facteur de qualité de 10. La courbe en pointillés est celle du filtre passe-bas du premier ordre pour comparaison.



Dans le cas d'un filtre passe-bas du deuxième ordre, on obtient pour les hautes fréquences une pente à −40 dB/décade, chaque fois que la fréquence est multipliée par un facteur 10, le gain réel est divisé par 100. Un filtre passe-bas du deuxième ordre est alors deux fois plus efficace qu'un filtre du premier ordre.



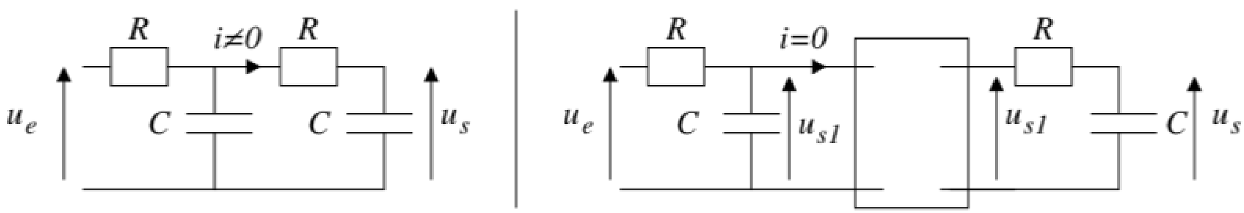
IV MONTAGES EN CASCADE

Un manière intuitive de réaliser un filtre du second ordre est l'association en cascade de deux filtres du premier ordre si en multipliant la fréquence par dix, chaque filtre diminue le gain d'un facteur 10, les deux filtres ensemble diminueront le gain d'un facteur 100.

Le montage proposé ci-dessous, correspond à la mise en cascade de deux filtres RC du premier ordre,cependant la fonction de transfert de l'ensemble n'est pas le produit des fonctions de transfert de chacun des filtres pris séparément.

$$\frac{1}{1-x^2+jQ/x} \neq \left(\frac{1}{1+jx}\right) \times \left(\frac{1}{1+jx}\right)$$

On ne trouve pas $\underline{H} = 1/(1+jx)^2$ mais $\underline{H} = (1+jx)/(1-x^2+3jx)$, et la pente est toujours de - 20 dB/décade. En effet, lors de la mise en cascade des deux filtres, le second prélève un courant et la fonction de transfert du premier s'en trouve modifiée.



On ne peut faire une étude en blocs de quadripôles uniquement s'il n'y a aucun courant qui "fuit" du quadripôle "amont" vers le quadripôle "aval", sinon, le comportement du quadripôle amont change entre l'étude à vide (sans quadripôle aval) et l'étude en charge (avec le deuxième quadripôle).

En terme d'impédance, il faut que l'impédance de sortie du premier quadripôle soit très inférieure à l'impédance d'entrée du second : $Z_{s,1} \ll Z_{e,2}$. (adaptation d'impédance).

Sur le schéma de droite (circuit ci-dessus, p18), on a interposé entre les deux filtres un dispositif possédant :
→ une très grande résistance d'entrée : il ne prélève pas de courant en amont,

→ une très faible résistance de sortie : la tension qu'il délivre est indépendante du montage en aval.

La fonction de transfert du montage est alors le produit des fonctions de transferts :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_{s_1}} \times \frac{\underline{u}_{s_1}}{\underline{u}_e} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$$

On peut utiliser un montage suiveur, par exemple avec un amplificateur linéaire intégré. Schématiquement, un montage suiveur est un filtre de gain constant égal à 1, de déphasage nul, avec une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie nulle.

V GABARIT D'UN FILTRE

On vient de voir que selon le cahier des charges, on va être amené à choisir des filtres différents. L'opération qui permet de choisir le filtre adapté s'appelle la détermination du **gabarit du filtre**.

Pour réaliser un gabarit, il faut déterminer :

une zone conservée : dans la bande-passante, le gain doit être supérieur à une valeur minimale G_{min} (et éventuellement inférieur à une valeur maximale G_{max});

une zone supprimée : dans la bande rejetée, le gain doit être inférieur à une valeur G_{att}

On souhaite éliminer les ultrasons d'un signal audio. On va donc souhaiter un gain supérieur à -3 dB pour la bande audible (de 0 à 20 kHz), et que l'atténuation des signaux de fréquence supérieure à 40 kHz soit supérieure à 10 dB.

On montre qu'un filtre passe-bas du premier ordre avec une fréquence de coupure à 20 kHz ne convient pas (atténuation trop faible dans la bande rejetée). Le calcul de la pente minimale d'un filtre acceptable donne une pente de - 23 dB/décade : un filtre du premier ordre ne pourra pas marcher.

PLAN

I SIGNAUX PERIODIQUES

I.1 Décomposition en série de Fourier

I.2 Caractéristiques d'un signal périodique

II FONCTION DE TRANSFERT. DIAGRAMME DE BODE.

2.1 Notion de filtre, fonction de transfert

2.2 Principaux types de filtre

2.3 Gain en décibel et diagramme de Bode

III ETUDE DE FILTRES CLASSIQUES

3.1 Exemple : filtre passe-bas du premier ordre

3.2 Filtre passe-haut du premier ordre

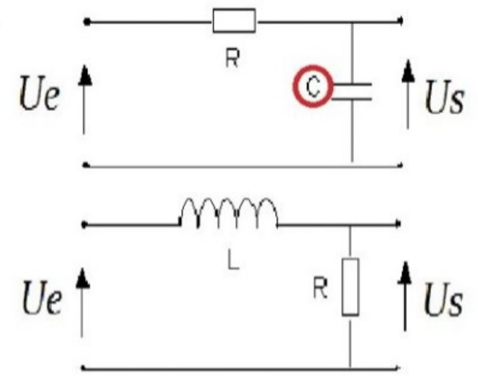
3.3 Filtre RLC passe bande

3.4 Filtre passe-bas du deuxième ordre

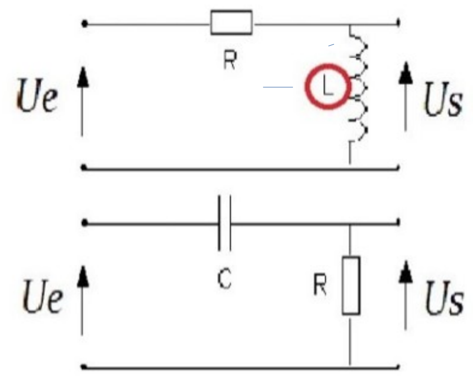
IV MONTAGES EN CASCADE

V GABARIT D'UN FILTRE

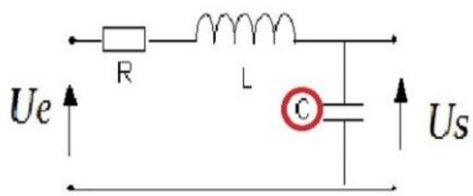
Filtre Passe-Bas (1er ordre)
(Passe-BaC)



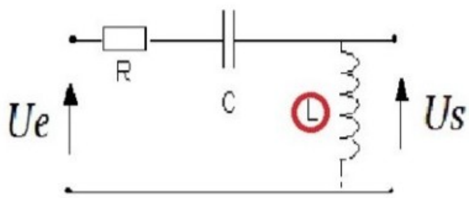
Filtre Passe-Haut (1er ordre)
(Passe-HauL)



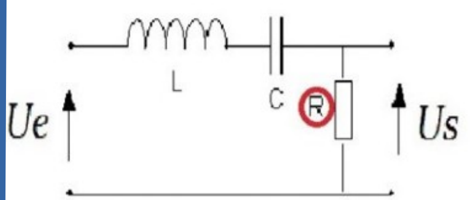
Filtre Passe-Bas (2e ordre)
(Passe-BaC)



Filtre Passe-Haut (2e ordre)
(Passe-HauL)



Filtre Passe-Bande (2e ordre)
(Passe-BandeR)



Filtre Coupe-Bande (2e ordre)
(CoupLe-Bande)