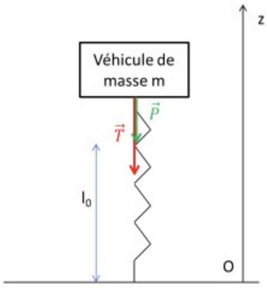
CCP TSI 2013

Premier problème : modélisation d'une suspension de véhicule

Première partie : suspension sans amortissement

1. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, les forces s'exerçant sur le véhicule sont le poids du véhicule $\overrightarrow{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ et la tension du ressort $\overrightarrow{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(z - l_0)\vec{u_z}$. Dans le cas du schéma, on a choisi $z > l_0$ pour le sens de $\overrightarrow{T}$.



2. A l'équilibre, $\overrightarrow{T} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$ d'après la première loi de Newton. On en déduit :

$$z_e = l_0 - \frac{mg}{k}$$

3. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique à la voiture de masse m :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T}$$

Toutes les forces étant portées par $\vec{u}_z$, on en déduit que l'accélération est portée par $\vec{u_z}$. D'où :

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - l_0)$$

$$\Longrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$$

4. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique pur avec un second membre constant.

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. ω_0 est la pulsation propre. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ est la période propre des oscillations.

La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière : $z(t) = Acos\omega_0 t + Bsin\omega_0 t + z_e$ où A et B sont des constantes d'intégration à déterminer avec les conditions initiales.

AN : $\omega_0 = \sqrt{\frac{10^5}{10^3}} = 10\ \mathrm{s}^{-1}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{10} \approx 0,628$ s.

5. On donne les conditions initiales : à $t = 0$, $z(0) = z_0 < z_e$ et $\dot{z}(0) = 0$.

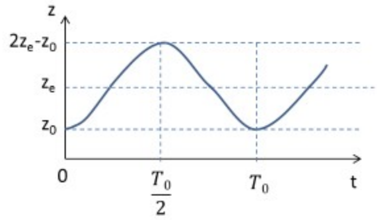
Par conséquent $A + z_e = z_0 \Rightarrow A = z_0 - z_e$ et $\dot{z}(t) = -\omega_0 Asin\omega_0 t + \omega_0 Bcos\omega_0 t \Rightarrow B = 0$.

Donc finalement :

$$z(t) = (z_0 - z_e)cos\omega_0 t + z_e$$

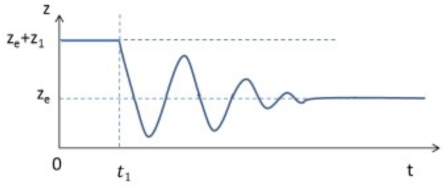
6. On calcule $z(t)$ pour différentes valeurs de t : $z(T_0/4) = z_e = z_{moy}$; $z(T_0/2) = 2z_e - z_0 = z_{max}$; $z(3T_0/4) = z_e$; $z(T_0) = z(0) = z_0 = z_{min}$

D'où l'allure suivante :



Deuxième partie : suspension avec amortissment

7. On a : $[h] = [F]/[v] = (\text{kg.m.s}^{-2})/(\text{m.s}^{-1}) = \text{kg.s}^{-1}$
8. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, les forces s'exerçant sur le véhicule sont le poids du véhicule $\overrightarrow{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$, la tension du ressort $\overrightarrow{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(z - l_0)\vec{u_z}$ et la force de frottement fluide : $\overrightarrow{F} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z$
   Lorsque le véhicule est à l'équilibre, la vitesse vaut 0, donc $\overrightarrow{F} = \vec{0}$, et par conséquent la position d'équilibre reste inchangée : $\overrightarrow{T} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0} \Rightarrow z_e = l_0 - \frac{mg}{k}$
9. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique à la voiture de masse m :
   $$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F}$$
   Toutes les forces étant portées par $\vec{u}_z$, on en déduit que l'accélération est portée par $\vec{u_z}$. D'où :
   $$m\ddot{z} = -mg - k(z - l_0) - h\dot{z}$$
   $$\Longrightarrow \ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$$
10. On écrit l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{h}{m}r + \frac{k}{m} = 0$. Le discriminant de cette équation vaut : $\Delta = \frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$
    Si $\Delta > 0$ donc si $h > 2\sqrt{km}$, alors les solutions de l'équation caractéristique sont réelles et le régime est apériodique.
    Si $\Delta < 0$ donc si $h < 2\sqrt{km}$, alors les solutions de l'équation caractéristique sont complexes et le régime est pseudopériodique.
    Si $\Delta = 0$ donc si $h = 2\sqrt{km}$, alors la solution de l'équation caractéristique est double et le régime est critique.
11. 11.1) Soit m_0 la masse du véhicule à vide et M masse de la charge. Si la suspension est en régime critique lorsque le véhicule est en charge, alors $h = 2\sqrt{km_0}$. En charge, $m = m_0 + M > m_0$, par conséquent $h < 2\sqrt{km}$ et le régime devient pseudopériodique.
    11.2) Pour ne pas que la suspension soit en régime pseudopériodique même en charge, il faut choisir $h > 2\sqrt{km_0}$. On peut supposer que $M << m_0$ et que par conséquent, même en charge, la suspension reste en régime apériodique.
12. Il s'agit dans cette question d'étudier la réponse à un échelon de hauteur z_1 (marche).
    12.1) $z(t < t_1) = z_1 + z_e$ et $z(t >> t_1) = z_e$
    NB : Il est dommage que l'énoncé ne demande pas la forme des solutions dans ce cas, tout à fait à la portée des candidats :
    $$z(t) = (Acos\omega t + Bsin\omega t)\, e^{-\frac{ht}{2m}} + z_e$$
    avec ω la pseudopulsation : $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{h^2}{4mk}}$
    Et avec les CI : $A = z_1$ et $B = \frac{h}{2m\omega}A$
    D'où l'allure du signal :



12.2) $z(t < t_1) = z_1 + z_e$ et $z(t >> t_1) = z_e$

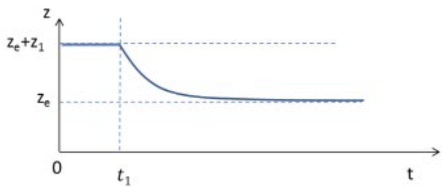
NB : Même remarque :

$$z(t) = (Ach\Omega t + Bsh\Omega t)\, e^{-\frac{ht}{2m}} + z_e$$

avec Ω une constante homogène à une pulsation : $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{h^2}{4mk} - 1}$

Et avec les CI : $A = z_1$ et $B = -\frac{h}{2m\omega}A$

D'où l'allure du signal :



Troisième partie : régime forcé

13. L'expression de la force de rappel du ressort est toujours la même : $\overrightarrow{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z$. Ici $l = z - z_s$, d'où $\overrightarrow{T} = -k(z - z_s - l_0)\vec{u_z}$

14. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique à la voiture de masse m :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F}$$

Toutes les forces étant portées par $\vec{u}_z$, on en déduit que l'accélération est portée par $\vec{u_z}$. D'où :

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - z_s - l_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_s)$$

$$\Longrightarrow m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = h\dot{z}_s + kz_s + kz_e$$

15. On pose $z' = z - z_e$. On a $\dot{z'} = \dot{z}$ et $\ddot{z'} = \ddot{z}$ car z_e est une constante, donc :

$$m\ddot{z'} + h\dot{z'} + kz' = h\dot{z}_s + kz_s$$

Soit $m\ddot{z'} + h\dot{z'} + kz' = Y(t)$ avec $Y(t) = h\dot{z}_s + kz_s$.

16. On pose $\underline{Z'} = \underline{Z'_m}e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z'_m} = Z'_m e^{j\varphi}$ et $\underline{Z_s} = Z_{sm}e^{j\omega t}$

L'équation différentielle étant une équation linéaire, on peut directement la passer en grandeur complexe, par conséquent :

$$m\underline{\ddot{Z}'} + h\underline{\dot{Z}'} + k\underline{Z'} = h\underline{\dot{Z}_s} + k\underline{Z_s}$$

$$\Rightarrow -m\omega^2\underline{Z'} + j\omega h\underline{Z'} + k\underline{Z'} = j\omega h\underline{Z_s} + k\underline{Z_s}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}} = \frac{k + j\omega h}{k - m\omega^2 + j\omega h}$$

En posant $\lambda = h/2m$ et ${\omega_0}^2 = k/m$ on obtient :

$$\Rightarrow \frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}} = \frac{{\omega_0}^2 + 2j\omega\lambda}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + 2j\omega\lambda}$$

En prenant le module de l'expression précédente, on obtient bien :

$$\left|\frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}}\right| = \sqrt{\frac{{\omega_0}^4 + 4\omega^2\lambda^2}{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}$$

17. 17.1) Pour $\omega \to 0$ on a $H \to \sqrt{\frac{{\omega_0}^4}{{\omega_0}^4}} \to 1$.
    La masse suit directement le relief du sol, $z = z_e + z_s$ $\forall t$ donc le ressort a constamment sa longueur d'équilibre.
    17.2) Pour $\omega \to \infty$ on a $H \to \sqrt{\frac{4\lambda^2\omega^2}{\omega^4}} \to 0$.
    La masse m ne bouge pas verticalement, $z = z_e$ $\forall t$.
    17.3) ω_r est la pulsation pour laquelle le dénominateur est minimal.
    On pose $g(\omega) = ({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2$.
    $g'(\omega) = -4\omega({\omega_0}^2 - \omega^2) + 8\lambda^2\omega$
    $g'(\omega_r) = 0 \Rightarrow \omega_r^2 = {\omega_0}^2 - 2\lambda^2$
    L'énoncé précise qu'on est dans le cas où ${\omega_0}^2 > 2\lambda^2$, donc $\omega_r = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\lambda^2}$.
    H est maximum pour $\omega = \omega_r$ donc cette pulsation correspond à la pulsation de résonance en élongation.
18. On trace l'allure de la courbe $H(\omega)$ en tenant compte des limites calculées :