III Lecture de diagramme de Bode

14 – Il s'agit d'un filtre passe-haut, puisqu'il coupe les basses fréquences et laisse passer les hautes.

Son asymptote basse fréquence a une pente de -40dB/décade, il s'agit donc d'un filtre du seconde ordre.

Sa fréquence de coupure est d'environ $f_0 \simeq 10$ Hz. Ceci peut se voir sur la courbe de phase en repérant le point d'inflexion.

15 – On rappelle que de façon générale, un signal $A\cos(\omega t+\varphi)$ est transformé en $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)| \times A\cos(\omega t+\varphi+\arg(H(\mathrm{j}\omega))$.

On rappelle également que $G = 20\log|H|$, et donc que $|H| = 10^{G/20}$. En particulier, une atténuation de 20 dB correspond à $G = -20$ et donc à diviser par 10 le signal d'entrée.

Un filtre étant linéaire, on peut raisonner terme par terme.

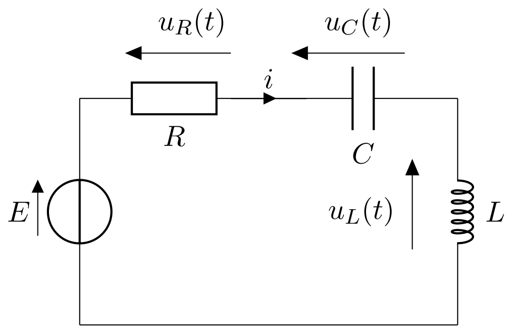
- Le terme constant E_0 est complètement supprimé.
- Le terme $E_0\cos(\omega t)$ se situe à 1 Hz. Il est atténué de 40 dB environ, soit d'un facteur 100. Il est également déphasé de π. Il devient donc : $E_0/100 \times \cos(\omega t+\pi)$.
- Le terme $E_0\cos(10\omega t+\pi/4)$ se situe à 10 Hz. Il est atténué d'environ 10 dB, soit d'un facteur $|H| = 10^{-10/20} = 0.3$. Il est également déphasé de $+\pi/2$. Il devient donc : $0.3E_0 \times \cos(10\omega t+\pi/4+\pi/2)$.
- Le terme $E_0\cos(100\omega t)$ se situe à 100 Hz. Il n'est ni atténué ni déphasé, et reste donc tel quel.

Finalement, on a

$$s(t) = E_0/100 \times \cos(\omega t+\pi) + 0.3E_0 \times \cos(10\omega t+\pi/4+\pi/2) + E_0 \times \cos(100\omega t).$$

I Production d'une tension sinusoïdale à partir d'une tension continue

On commence par refaire le schéma en indiquant les flèches de tension et de courant.



1.a – À $t=0^-$ on a $i(0^-)=0$ (car l'interrupteur est ouvert), $u_c(0^-)=0$ (car le condensateur est déchargé).

Or le courant traversant une bobine est nécessairement continu, donc $\boxed{i(0^+)=i(0^-)=0}$, et la tension aux bornes d'un condensateur est nécessairement continue, donc $\boxed{u_C(0^+)=u_C(0^-)=0.}$

Aux bornes de la résistance on a $\boxed{u_R(0^+)=Ri(0^+)=0.}$

Enfin, la loi des mailles indique que pour tout $t>0$ on a $u_R(t)+u_C(t)+u_L(t)=E$, et ceci est donc aussi valable à $t=0^+$, ce qui donne alors $0+0+u_L(0^+)=E$, soit $\boxed{u_L(0^+)=E.}$

1.b – $\star$ Loi des mailles : $E = Ri+u_C+u_L$, que l'on dérive pour pouvoir utiliser $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i/C$.

On a alors $0 = R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i}{C} + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$.

On remplace $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ à l'aide de la relation $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$: $0 = \dfrac{R}{L}u_L + \dfrac{i}{C} + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$.

On dérive encore pour pouvoir encore remplacer $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ par u_L/L : $0 = \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{u_L}{LC} + \frac{\mathrm{d}^2 u_L}{\mathrm{d}t^2}$. Ce qui se réarrange en :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{u_L}{LC} = 0. \tag{2}$$

⋆ On identifie donc $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$, et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$, d'où $\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$

1.c – Il faut écrire l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle :

$$x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0. \tag{3}$$

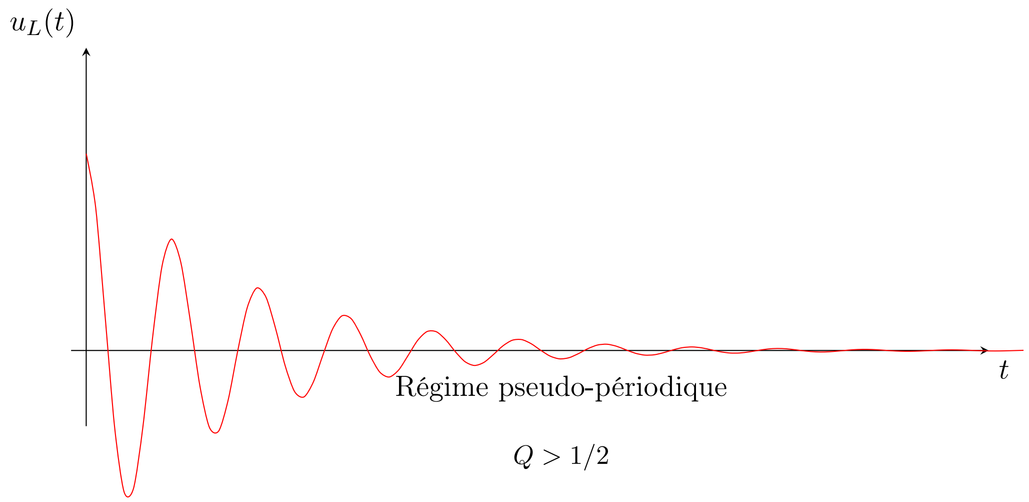
Le discriminant est $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$.

Il y a production d'oscillations seulement si le régime est pseudo-périodique, ce qui est le cas si le discriminant est négatif.

Donc si $Q > 1/2$, soit donc si $\boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.}$

A.N. : $\boxed{R < 2.4\,\mathrm{k}\Omega.}$

1.d –



Le paramètre qui donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations est le facteur de qualité Q. On a environ Q oscillations.

2 – On a la relation $u_L + u_C + u_R = E$, que l'on peut dériver : $\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = 0$.

On utilise ensuite $\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{R}{L}u_L$, $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}i$, d'où en fait :

$$\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i(t) + \frac{R}{L}u_L = 0.$$

Ceci est valable pour tout t, donc en particulier à la limite où $t \to 0^+$, donc :

$$\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{1}{C}i(0^+) - \frac{R}{L}u_L(0^+).$$

Or $i(0^+) = 0$, et $u_L(0^+) = E$, donc on obtient $\boxed{\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{RE}{L}.}$

II Filtre ADSL

7 – Pour récupérer seulement les signaux téléphoniques il faut un filtre passe-bas.

Pour récupérer seulement les signaux informatiques il faut un filtre passe-haut.

On peut proposer une fréquence de coupure f_0 autour de 10 kHz.

8 – À basses fréquences, les bobines sont équivalentes à des fils. On a donc $s = 0$.

À hautes fréquences, les bobines sont équivalentes à des interrupteurs ouvert. On montre alors que le courant parcourant les résistances est nul. Celles-ci ne jouent donc aucun rôle. On a donc $s = e$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

La sortie s doit donc correspondre au signal fourni à la box internet.

9.a – Diviseur de tension : $\boxed{\underline{s} = \underline{u} \times \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega}.}$

9.b – Soit $\underline{Z}$ l'impédance regroupant la résistance de droite et les deux bobines.

On a $\dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \dfrac{1}{R + \mathrm{j}L\omega}$, soit donc $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{\mathrm{j}L\omega(R + \mathrm{j}L\omega)}{R + 2\mathrm{j}L\omega}.}$

On réalise alors un schéma équivalent, et on voit avec un diviseur de tension que l'on a $\boxed{\underline{u} = \underline{e} \times \dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R}.}$

10.a – ⋆ Hautes fréquences : $\underline{H} \sim \dfrac{-x^2}{-x^2} = 1$, $\boxed{\underline{H} \sim 1.}$

⋆ Basses fréquences : $\underline{H} \sim \dfrac{-x^2}{1} = -x^2$, $\boxed{\underline{H} \sim -x^2.}$.

10.b – ⋆ Pour le gain :

On a $G_{\mathrm{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$.

À hautes fréquences on a donc $G_{\mathrm{dB}} \sim 20 \log(1) = 0$.

À basses fréquences $G_{\mathrm{dB}} \sim 20 \log |-x^2| = 40 \log x$, soit une pente de $+40$ dB par décade.

⋆ Pour la phase :

$\varphi = \arg(\underline{H})$.

À hautes fréquences on a donc $\varphi \sim \arg(1) = 0$.

À basses fréquences $\varphi \sim \arg(-x^2) = \pi$ car il s'agit d'un réel négatif.

10.c – Voir allure d'un filtre passe-haut du deuxième ordre, sans résonance ici.

11 – ⋆ $\boxed{|\underline{H}| = \dfrac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 9x^2}}.}$

⋆ $\arg(\underline{H}) = \arg(-x^2) - \arg(1 - x^2 + 3\mathrm{j}x)$.

Or $\arg(-x^2) = \pi$.

Et on a $\arg(1 - x^2 + 3\mathrm{j}x) = \arctan \dfrac{3x}{1-x^2}$ si la partie réelle est positive, donc si $x < 1$,

et $\arg(1 - x^2 + 3\mathrm{j}x) = \pi + \arctan \dfrac{3x}{1-x^2}$ si la partie réelle est négative, donc si $x > 1$.

Donc finalement $\boxed{\arg(\underline{H}) = \pi - \arctan \dfrac{3x}{1-x^2} \text{ si } x < 1 \quad \text{et} \quad \arg(\underline{H}) = \arctan \dfrac{3x}{1-x^2} \text{ si } x > 1.}$

III Lecture du diagramme de Bode (suite)

16. Nature du filtre

On a un circuit RL série où la tension de sortie est prise aux bornes de la bobine.

Analyse asymptotique :

- À basse fréquence $\omega \to 0$, l'inductance se comporte comme un court-circuit: $u_s \to 0$
- À haute fréquence $\omega \to \infty$, l'inductance devient un obstacle (impédance infinie), donc $u_s \to u_e$

C'est un filtre passe-haut (les hautes fréquences passent, les basses sont atténuées).

17. Fonction de transfert

La tension de sortie est prise aux bornes de L, donc on écrit :

$$\underline{H}=\frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}=\frac{j\omega L}{\{R+jL\omega\}} \qquad \text{module } H=\frac{\omega L}{\sqrt{\{R^2+(L\omega)^2\}}} \qquad G_{dB}=20\log\frac{\omega L}{\sqrt{\{R^2+(L\omega)^2\}}}$$

18. Identifier les affirmations fausses sur la pulsation de coupure

(a): ✔VRAIE– c'est bien le point où les asymptotes se croisent dans un diagramme de Bode.

(b): ✔VRAIE– définition classique : le gain est diminué de 3 dB par rapport au gain max.

(c): ❌FAUSSE– la moitié du gain, ce n'est pas -3 dB, car le dB est logarithmique.

- Exemple : pour un gain max de 1 (0 dB), moitié = 0.5 → 20log(0.5) ≈ −6 dB

19 Par définition, la pulsation de coupure est la valeur de ω pour laquelle :

$$\frac{\omega_C L}{\sqrt{R^2+(L\omega_C)^2}}=\frac{1}{\sqrt{(2)}}$$

Élevons les deux côtés au carré:

$$\frac{(\omega_C L)^2}{R^2+(L\omega_C)^2}=\frac{1}{(2)}$$

$$(\omega_C L)^2=\frac{1}{2}x(R^2+(L\omega_C)^2)$$

$$2(\omega_C L)^2=R^2+(L\omega_C)^2$$

$$(\omega_C L)^2=R^2$$

$$L\omega_C=R$$

$$\omega_C=\frac{R}{L}$$

20. Associer les courbes aux étudiants

🔹 **Étudiant 1** : il a inversé R et L

. Si on inverse R et L, on mesure aux bornes de R (et non L), donc on a un filtre passe-bas **.**
. Ce cas correspond à la **courbe (c)** (le gain diminue avec la fréquence)

🔹 **Étudiant 2** : il s'est trompé avec R = 100 Ω

- cela change la pulsation de coupure : $\omega_c = R/L \Rightarrow$ avec $R=100 \Rightarrow \omega c \div 10$
- Donc le palier du gain est décalé à gauche
- C'est la **courbe (a)**

🔹 **Étudiant 3** : il a manipulé correctement

- Bonne nature du filtre (passe-haut)
- 0 dB à haute fréquence
- Bonne coupure autour de $\omega c \approx 1000$ rad/s
- C'est la **courbe (b)**

🔹 **Courbe (d)** ?

- Elle correspond à un filtre passe-haut correct, mais avec coupure trop à droite, donc probablement R=10 kΩ, ce n'est pas mentionné, on l'ignore ici.

IV Calorimétrie

Hypothèses :

- Le système est isolé thermiquement.
- Aucun changement d'état.
- Les échanges de chaleur se font uniquement entre le métal, l'eau, et le calorimètre.

Équilibre thermique :

Chaleur cédée par l'eau + le calorimètre :

$Q_{eau+cal} + Q_{métal} = 0$

Autrement dit :

$(me \cdot ce + \mu \cdot ce)(T_F - T_e) = -(m \cdot c)(T_F - T_0)$ D'où $c = -\dfrac{(me+\mu)\cdot ce\cdot(TF-Te)}{m\cdot(TF-T0)}$

A.N.: $c = -\dfrac{(0{,}300+0{,}040)\cdot 4180\cdot(346-353)}{0{,}860\cdot(346-293)}$

$c = 218{,}26\ J.K^{-1}.kg^{-1}$.