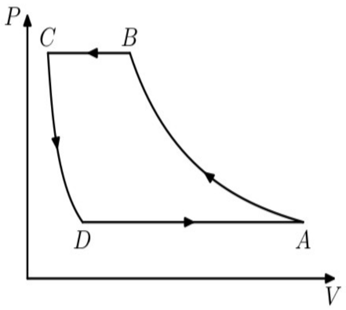
# Corrigé de la pompe à chaleur

1) Cycle




2) Il faut que la transformation soit adiabatique, réversible, le gaz parfait, γ constant. (résumé page 4; il existe trois relations (voir cours)).

3) En appliquant les lois de Laplace aux deux adiabatiques AB et CD on obtient :

$T_A^{\gamma} P_A^{1-\gamma} = T_B^{\gamma} P_B^{1-\gamma}$ d'où $T_A^{\gamma} P_A^{1-\gamma} / P_B^{1-\gamma} = T_B^{\gamma}$ (relation entre pression et température).

$T_A^{\gamma} (P_A/P_B)^{1-\gamma} = T_B^{\gamma}$

$T_B = T_A (P_A/P_B)^{(1-\gamma)/\gamma}$

$T_B = T_A (P_A/P_B)^{(1/\gamma - 1)}$ avec $1 - 1/\gamma = \beta$; $a = P_1/P_0$; $P_A = P_0$ et $P_B = P_1$; on obtient $T_B = T_0 (P_0/P_1)^{(1/\gamma - 1)}$

$T_B = T_0 (P_1/P_0)^{-(1/\gamma - 1)} = T_0 (P_1/P_0)^{(1-1/\gamma)}$

$T_B = T_0 a^{\beta}$ A.N.: $T_B = 448$ K.

$T_C^{\gamma} P_C^{1-\gamma} = T_D^{\gamma} P_D^{1-\gamma}$

$T_D = T_C (P_C/P_D)^{(1/\gamma - 1)}$

$T_D = T_1 (P_1/P_0)^{(1/\gamma - 1)}$

$T_D = T_1 a^{-\beta}$ A.N.: $T_B = 188$ K.

4) L'efficacité de la pompe à chaleur est $e = -Q_{BC}/W$ où W est le travail reçu sur un cycle. D'après le premier principe et $\Delta U_{cycle} = 0$; $W = -Q_{BC} - Q_{DA}$ et $e = -Q_{BC}/(-Q_{BC} - Q_{DA}) = Q_{BC}/(Q_{BC} + Q_{DA})$
$e = Q_{BC}/(Q_{BC} + Q_{DA}) = 1/(1 + Q_{DA}/Q_{BC})$
Remarque: $Q_{AB}$ et $Q_{CD}$ nulles car les transformations sont adiabatiques réversibles.

Les quantités de chaleurs $Q_{BC}$ et $Q_{DA}$ sont égales à $Q_{DA} = n\,C_{pm}(T_0 - T_D)$, $Q_{BC} = n\,C_{pm}(T_1 - T_B)$ car ces transformations sont isobares.

$e = Q_{BC}/(Q_{BC} + Q_{DA}) = 1/(1 + Q_{DA}/Q_{BC})$

$e = 1/(1 + \cancel{nC_{pm}}(T_0 - T_D)/\cancel{nC_{pm}}(T_1 - T_B))$

$e = 1/(1 + (T_0 - T_D)/(T_1 - T_B))$

$e = 1/[1 + (T_0 - T_1 a^{-\beta})/(T_1 - T_0 a^{\beta})]$

$e = 1/[1 + (T_0 - T_1/a^{\beta})/(T_1 - T_0 a^{\beta})]$

$e = 1/[1 + 1/a^{\beta}. (T_0 a^{\beta} - T_1)/(T_1 - T_0 a^{\beta})]$

$e = 1/[1 - 1/a^{\beta}.\cancel{(T_1 - T_0 a^{\beta})/(T_1 - T_0 a^{\beta})}]$
$e = 1/(1 - 1/a^{\beta})$
$e = 1/(1 - a^{-\beta})$  A.N.: $e = 2{,}71$

5) Un cycle de Carnot est un cycle réversible composé de deux adiabatiques réversibles et de deux isothermes $T_0$, $T_1$ sur lesquelles s'effectuent les échanges de chaleur avec les thermostats.

L'efficacité du cycle de Carnot est supérieure au cycle de Joule car il s'agit d'un cycle réversible (théorème de Carnot).

$$\boxed{e = \frac{-Q_C}{W}} \qquad \boxed{e \leq e_{C,pac} = \frac{T_C}{T_C - T_F}}$$

Démonstration

$W + Q_F + Q_C = 0$ (premier principe ($\Delta U_{cycle} = W + Q_{cycle}$) + cycle : $\Delta U_{cycle} = 0$)

$Q_F = -W - Q_C$ et $Q_C/T_C + Q_F/T_F \leq 0$ (inégalité de Clausius)

$Q_C/T_C + (-W - Q_C)/T_F \leq 0$

$Q_C/T_C - W/T_F - Q_C/T_F \leq 0$

$T_F Q_C - T_C W - T_C Q_C \leq 0$

$T_F Q_C - T_C Q_C - T_C W \leq 0$

$Q_C (T_F - T_C) \leq T_C W$

$- Q_C (T_C - T_F) \leq T_C W$

$- Q_C /W \leq T_C /(T_C - T_F)$

$e = - Q_C /W$

$e \leq T_C /(T_C - T_F)$

$e_C = T_C /(T_C - T_F)$  A.N.: $e_C = 298 / (298 - 283) = 19{,}87$

6) L'efficacité du cycle de Carnot est supérieure au cycle de Joule car il s'agit d'un cycle réversible (théorème de Carnot). On trouve 19,87 au lieu de 2,71.

7) Au cours d'un cycle, l'entropie créée correspond à la variation d'entropie des deux sources froide et chaude. $\Delta S_{cycle} = S_{échangée} + S_{créée} = 0$ car $\Delta S_{cycle} = 0$.

$S_{créée} = - S_{échangée} = - Q_{BC}/T_1 - Q_{DA}/T_0 = - n C_{pm}(T_1 - T_B)/T_1 - n C_{pm}(T_0 - T_D)/T_0$

$S_{créée} = - nC_{pm}(T_1 - T_0 a^{\beta})/T_1 - nC_{pm}(T_0 - T_1 a^{-\beta})/T_0$ avec $n = 1$ et $C_{pm} = \gamma R/(\gamma-1) = R/(1-1/\gamma) = R/\beta$

$S_{créée} = -R/\beta (T_1 - T_0 a^{\beta})/T_1 - R/\beta (T_0 - T_1 a^{-\beta})/T_0$

$S_{créée} = -R/\beta\,[\,(T_1 - T_0\, a^{\beta})/T_1 - (T_0 - T_1\, a^{-\beta})/\, T_0]$

$S_{créée} = -R/\beta\,[\,(1 - T_0\, a^{\beta}/T_1) + (1 - T_1\, a^{-\beta}/\, T_0)]$ avec $x = T_0\, a^{\beta}/T_1$

$S_{créée} = -R/\beta\,[\,(1 - x) + (1 - 1/\, x)]$

$S_{créée} = R/\beta\,(\, x + 1/x - 2)$

dérivée de $R/\beta\,(\, x + 1/x - 2)$: $R/\beta\,(1 - 1/x^2)$

Nulle si $1 - 1/x^2 = 0$ soit $x = 1$.

$1 - 1/x^2 > 0$ si $x > 1$ $S_{créée}$ croissante; décroissante si $0 < x < 1$.

A.N.: $S_{créée} = 4{,}92\ JK^{-1}mol^{-1}$.

8) En régime permanent ce qui est perdu est compensé par ce qui est fourni, la puissance mécanique cherchée sera $P = Q_f\,/e = 7{,}4$ kW.