

Exercice n°6 cadre mobile

Une spire rectangulaire de surface S dans laquelle circule un courant i sinusoïdal d'amplitude I_m ($i(t) = I_m \sin \theta(t)$), et de pulsation $\omega = d\theta/dt$ est placé dans un champ magnétique constant et uniforme B , orthogonal à son axe de rotation.

1. En considérant la spire dans une position quelconque et $i = I_m$, indiquer le sens des forces de Laplace et du couple.
2. Expliquer qualitativement pourquoi si la spire tourne à la vitesse ω , le couple moyen des forces de Laplace sur la spire est non nul.
3. Quelle doit-être la position de la spire lorsque $i = I_m$ pour que le couple soit maximal ? Dans quel sens doit-elle tourner ?
4. Dans ce cas, calculer la valeur moyenne du couple des forces de Laplace sur la spire.

1. Sens des forces de Laplace et du couple (pour $i = I_m$)

Situation :

- Une spire rectangulaire porte un courant $i(t) = I_m \cdot \sin(\theta(t))$.
- Elle est plongée dans un champ magnétique constant \vec{B} , orthogonal à l'axe de rotation.
- Le courant est supposé à son maximum : $i = I_m$.
- On considère une position quelconque (angle θ).

Forces de Laplace :

La force de Laplace sur un segment de fil parcouru par un courant est donnée par :

$$\vec{F}_L = i \vec{l} \times \vec{B}$$

Sur les deux côtés verticaux de la spire (parallèles à l'axe de rotation), les forces de Laplace sont opposées, de sens antiparallèles, mais pas colinéaires (puisqu'ils sont à des positions différentes sur la spire).

Couple :

Ces deux forces forment un couple qui tend à faire tourner la spire.

Le sens du couple dépend du sens du courant et de l'orientation du champ B .

Si on suppose que le champ B est horizontal et la spire est initialement dans un plan vertical, alors les forces de Laplace vont créer un couple autour de l'axe horizontal de rotation.

2. Pourquoi le couple moyen est non nul si la spire tourne à la vitesse ω

- Le courant est **sinusoïdal** : $i(t) = I_m \sin(\theta(t))$.
- Si la spire tourne à la vitesse $\omega = d\theta/dt$ constante, alors $\theta(t) = \omega t$.
- Le **couple électromagnétique** $M(t) \propto i(t) \cdot \sin(\theta) = I_m \sin(\theta) \cdot \sin(\theta) = I_m \sin^2(\theta)$.

Donc :

$$M(t) \propto \sin^2(\theta(t)) \Rightarrow \text{le couple est toujours positif}$$

- Puisque $\sin^2(\theta)$ est toujours ≥ 0 , la contribution moyenne sur un cycle est **non nulle**.
- Il y a donc un **couple moyen moteur** : la spire est **auto-entretenu** si les pertes sont compensées.

3. Position de la spire pour que le couple soit maximal

Le couple instantané est donné par :

$$M(t) \propto i(t) \cdot \sin(\theta) = I_m \sin(\theta) \cdot \sin(\theta) = I_m \sin^2(\theta)$$

Ce couple est **maximal** lorsque $\sin^2(\theta)$ est maximal, c'est-à-dire :

$$\sin(\theta) = \pm 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Donc :

- Le **couple est maximal** lorsque la **spire est perpendiculaire au champ magnétique** (plan de la spire parallèle à B).
- Le **sens de rotation** doit être **tel que θ augmente** dans le même sens que la variation du courant sinusoïdal ($\sin(\theta)$) pour maintenir le produit $\sin(\theta) \cdot i(t)$ positif le plus souvent possible.

4. Calcul de la valeur moyenne du couple

On a :

$$M(t) = M_{\max} \cdot \sin^2(\theta) = M_{\max} \cdot \sin^2(\omega t)$$

Valeur moyenne sur une période :

$$\langle M \rangle = M_{\max} \cdot \langle \sin^2(\omega t) \rangle = M_{\max} \cdot \frac{1}{2}$$

Valeur de M_{\max} :

Le couple maximal est donné par :

$$M_{\max} = i \cdot B \cdot S$$

(avec S la surface de la spire et B perpendiculaire à celle-ci)

Donc :

$$\langle M \rangle = \frac{1}{2} \cdot B \cdot S \cdot I_m$$