# MAG 4 Lois de l'auto-induction

Notions et contenu	Capacités exigibles  magnétique qui dépend du temps .	
Circuit fixe dans un champ		
Auto-induction. Flux propre et inductance propre. Étude énergétique.	Différencier le flux propre des flux extérieurs.  Vérifier la compatibilité du signe de l'inductance propre avec la loi de modération de Lenz. Évaluer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur, le champ magnétique créé par la bobine étant donné.  Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.  Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.	
Cas de deux bobines en interaction. Inductance mutuelle entre deux bobines.	·	
Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	1. **	
Étude énergétique.	Conduire un bilan de puissance et d'énergie.	
Transformateur de tension parfait.	Établir la loi des tensions. Citer des applications du transformate tension pour le transport d'énergie électrique oul'isolement.	

Notions et contenu	Capacités exigibles	
Circuit mobile dans un champ	magnétique stationnaire	
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique	Interpréter qualitativement les phénomènes créés lors du mouvement d'une barre sur des rails de Laplace et lors du mouvement d'une spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique. Établir les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Établir et interpréter la relation entre la puissance de la force de Laplace et la puissance électrique. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.	
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en citer des exemples d'utilisation. <b>Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.</b>	
Conversion de puissance électrique en puissance mécanique  Moteur à courant continu à entrefer plan.	Expliquer le principe de fonctionnement d'un moteur à courant continu à entrefer plan en utilisant les forces de Laplace.Utiliser la relation entre la puissance de la force de Laplace et la puissance électrique.Effectuer un bilan énergétique.	

# Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps

### I AUTO-INDUCTION

# $d\vec{S}$

# I-1. Flux propre et inductance propre.

On considère un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité i.

Cette source de courant crée un champ magnétique propre  $\vec{B}_p$  qui traverse la spire elle-même et génère un flux propre :  $\Phi_p = \iint_{\Sigma} \vec{B}_p . d\vec{S}$ 

Le champ magnétique  $\vec{B}_p$  est proportionnel à l'intensité; il en est de même pour le flux propre qui peut donc s'écrire :  $\Phi_p = \mathbf{L} \times \mathbf{i}$ .

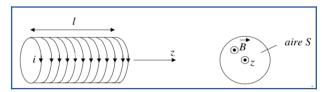
La formule précédente constitue la définition de L, l'inductance propre de la spire, qui s'exprime en henry (H).

L'inductance propre est un coefficient positif, purement géométrique, qui ne dépend que de la forme du circuit.

# I-2. Inductance propre d'un solénoïde infini

On considère un solénoïde constitué de N spires jointives, de section S, parcourues par un courant d'intensité i.

Le solénoïde a une longueur l suffisamment importante devant ses dimensions latérales pour appliquer les résultats du **solénoïde infini.** 



Le champ magnétique est uniforme au sein du solénoïde et vaut  $B = \mu_0 nI$  avec n = N/l.

Ce champ magnétique est créé par la bobine et engendre un flux à travers la bobine elle-même, il s'agit bien d'un flux propre qui correspond au flux à travers les N spires de la bobine :

$$\Phi_P = (\mu_0 I \frac{N}{l}) NS = \mu_0 N^2 \frac{S}{l} I \text{ donc } L = \mu_0 N^2 \frac{S}{l}$$

On constate que l'inductance propre varie comme  $N^2$  et sera donc significative pour un enroulement important de spires.

Pour une bobine de 8 cm de long, 500 spires, réparties sur un carré de côté 5 cm,  $L \approx 10$  mH.

# I-3. Circuit électrique équivalent

Si l'intensité du courant parcourant le circuit dépend du temps, le flux propre varie dans le temps et il apparaît, d'après la loi de Faraday, une force électromotrice :

$$e = \frac{-d\Phi_P}{dt} = \frac{-dLi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

En prenant garde aux orientations (la force électromotrice est définie par rapport au courant électrique), on en déduit le schéma électrique équivalent de la bobine.  $U_L = L \frac{di}{dt}$ 



Loi de Lenz : la force électromotrice apparaît du fait d'une variation de l'intensité du courant, pour une intensité croissante, la force électromotrice est négative, elle constitue un générateur qui tend à contrer la mise en place du courant. On retrouve l'idée que dans un circuit inductif il y a un retard à l'installation du courant (cf. échelon de tension pour un circuit RL).

# I-4. Bilan énergétique

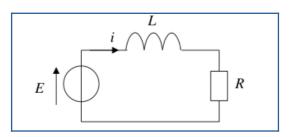
On considère un circuit constitué d'un générateur de tension de force électromotrice E, d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L.

Partant de la loi des mailles, on multiplie l'équation par l'intensité du courant pour obtenir un bilan

de puissance : 
$$Ei = Ri^2 + \frac{Ldi}{dt}i = Ri^2 + d\frac{\left(\frac{Li^2}{2}\right)}{dt}$$

Le bilan de puissance s'établit alors selon :

- Ei : puissance fournie par le générateur;
- Ri<sup>2</sup>: puissance dissipée par effet Joule;
- Li<sup>2</sup>/2 : énergie magnétique stockée dans la bobine.



L'énergie magnétique d'un circuit d'inductance propre L parcouru par un courant d'intensité i est :

$$Em = \frac{1}{2}Li^2$$

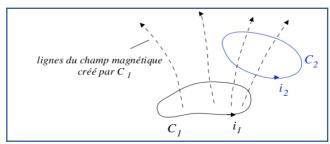
3

### II INDUCTION ENTRE DEUX CIRCUITS

### II-1. Inductance mutuelle

On considère deux circuits C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub> fermés et filiformes parcourus respectivement par des courants

d'intensité i<sub>1</sub> et i<sub>2</sub>.



Le circuit  $C_1$  crée un champ  $\vec{B}_1$  responsable, au travers du circuit  $C_2$ , d'un flux  $\Phi_{1\rightarrow 2}$ , proportionnel à l'intensité  $i_1$ :  $\Phi_{1\rightarrow 2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \, S d\vec{S}$   $\Phi_{1\rightarrow 2} = M_{21} \times i_1$ 

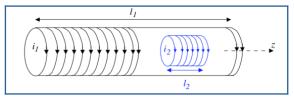
De même, le circuit  $C_2$  crée un champ  $\vec{B}_2$  responsable, au travers du circuit  $C_1$ , d'un flux  $\Phi_{2\rightarrow 1}$ , proportionnel à l'intensité  $i_2$ :  $\Phi_{2\rightarrow 1} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \, Sd\vec{S}$   $\Phi_{2\rightarrow 1} = M_{12} \times i_2$ 

On peut montrer (théorème de Neumann) que  $M_{21} = M_{12} = M$ 

Ces formules définissent M, l'inductance mutuelle des deux circuits, elle ne dépend que des caractéristiques géométriques des deux circuits et de leur position relative, son signe dépend des orientations choisies pour  $C_1$  et  $C_2$  et est donc arbitraire.

# II-2. Exemple de calcul d'une inductance mutuelle

On souhaite déterminer l'inductance mutuelle entre deux « grandes » bobines de même axe. Une première bobine de longueur  $l_1$ , constituée de  $N_1$  spires de surface  $S_1$  et parcourue par un courant d'intensité  $i_1$ , entoure une seconde bobine de longueur  $l_2$  constituée de  $N_2$  spires de surface  $S_2$  et parcourue par un courant d'intensité  $i_2$ .



La bobine «1» crée, en son sein,un champ magnétique:  $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \vec{u}_z$ 

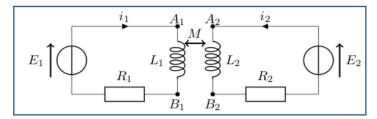
Ce champ magnétique engendre un flux à travers la bobine «2»:

$$\Phi_{1\to2} = N_2 \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} N_2 S_2 i_1 = M i_1$$

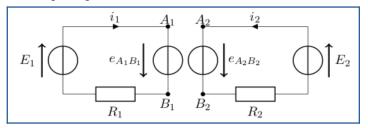
On en déduit pour l'inductance mutuelle :  $M = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} N_2 S_2$ 

# II-3. Circuit électrique équivalent

On considère le système électrique ci-dessous constitué de deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  couplés entre eux par une inductance mutuelle M.



On peut définir le schéma électrique équivalent :



Le circuit  $C_1$ , parcouru par un courant d'intensité  $i_1$ , est soumis à son flux propre  $\Phi_{1,p} = L_1 i_1$  et au flux produit par le circuit  $C_2$  à travers  $C_1$ ,  $\Phi_{2 \to 1} = M i_2$ , ce qui donne pour le flux total ressenti par le circuit  $C_1$ :  $\Phi_1 = \Phi_{1,p} + \Phi_{2 \to 1} = L_1 i_1 + M i_2$ 

Ce flux induit une force électromotrice dans  $C_{1v}$ :  $e_{A_1B_1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} = -d\frac{L_1i_1 + Mi_2}{dt}$ 

De même pour le circuit  $C_{2v}$ :  $te_{A_2B_2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$ 

# II-4. Bilan énergétique des circuits couplés

Dans le circuit 1, la loi des mailles s'écrit :  $E_1 = R_1i_1 - e_{A1B1}$ 

On en déduit l'équation électrique pour la maille de gauche :  $E_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$  (1)

On obtient de même pour le circuit de droite :  $E_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$  (2)

On est en présence d'un système d'équations différentielles couplées.

### Bilan énergétique.

En multipliant ces équations électriques respectivement par  $i_1$  et par  $i_2$ , et en sommant, on voit apparaître le bilan énergétique :

5

$$E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

$$E_{1}i_{1}+E_{2}i_{2}=R_{1}i_{1}^{2}+R_{2}i_{2}^{2}+d\frac{(\frac{1}{2}L_{1}i_{1}^{2}+\frac{1}{2}L_{2}i_{2}^{2}+Mi_{1}i_{2})}{dt}$$

Le premier membre représente la puissance fournie par les générateurs; une partie de cette puissance est dissipée par effet Joule comme l'indique les deux premiers termes du membre de droite; la quantité supplémentaire est associée à l'énergie emmagasinée sous forme d'énergie magnétique au sein du système.

L'énergie magnétique d'un système de deux bobines couplées a pour expression :

$$\frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2$$

III APPLICATION: extrait de CCS 2025

### II – Préliminaire : inductance propre et inductance mutuelle entre deux circuits

On cherche dans cette sous-partie à établir quelques résultats utiles par la suite en considérant deux solénoïdes cylindriques coaxiaux  $S_a$  et  $S_b$ , de même longueur  $\ell$ , de rayons respectifs  $r_a$  et  $r_b$ , comportant respectivement  $N_a$  et  $N_b$  spires.  $S_a$  et  $S_b$  sont parcourus par des courants notés respectivement  $i_a$  et  $i_b$  et orientés comme indiqué en figure 5. On admet que les effets de bord sont négligeables, ce qui revient à considérer que  $S_a$  et  $S_b$  se comportent comme des solénoïdes infinis. L'ensemble baigne dans l'air assimilé à du vide de perméabilité magnétique  $\mu_0$ .



Figure 5 – Schéma en coupe des solénoïdes coaxiaux

On admet que le champ magnétique créé à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant i s'écrit  $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u_z}$  avec n le nombre de spires par unité de longueur, et que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

- **Q13.** Rappeler la définition générale de l'inductance propre L d'un circuit et de l'inductance mutuelle M entre deux circuits.
- **Q14.** Établir l'expression des inductances propres  $L_a$  et  $L_b$  des solénoïdes  $S_a$  et  $S_b$  en fonction de  $N_a$ ,  $N_b$ ,  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $\mu_0$  et  $\ell$ .
- **Q15.** En admettant qu'il n'y a aucune forme de perte magnétique, établir l'expression de l'inductance mutuelle M entre les solénoïdes  $S_a$  et  $S_b$ .
- **Q16.** Montrer que l'on a  $M = k\sqrt{L_aL_b}$  en donnant l'expression de k en fonction de  $r_a$  et  $r_b$ .

On considère pour la suite le cas où  $r_a = r_b$  pour lequel k = 1.

**Q17.** Montrer que 
$$\frac{L_a}{N_a^2} = \frac{L_b}{N_b^2}$$
.

Les deux solénoïdes  $S_a$  et  $S_b$  forment le primaire et le secondaire d'un transformateur. On note  $u_a(t)$  la tension aux bornes du primaire et  $u_b(t)$  la tension aux bornes du secondaire. Les deux tensions sont orientées en convention récepteur.

Q18. En écrivant les équations électriques pour le primaire et le secondaire, montrer que

$$\frac{u_a(t)}{N_a} = \frac{u_b(t)}{N_b}. \tag{TSI 2}$$

# <u>Réponses</u>

```
Inductance propre = Li avec +: flux magnetique que trouberse
                                             le circuit.
         Inductance mutuelle entre 2 circuits: $ = Hia
                                                    flux magnétique créé paria,
             De marière symétrique: \phi_{b\rightarrow a} = \pi i b
                                    M= dab = Phoa
 Q14 hyp. solenoide a.
                   → champ B'uniforme à l'interieur et rul à l'extérieur.
                                   B= Monia = Mo Na ia
        Sa: Na spires.
             P: longueur
                               Pispine = BS = po Na iax (Tra2)
              Ta: nayon.
                                 Ptotal = Na Pispine = No Na in Tra
           De même your SB Ptotal = UN b2 x ib TID
als Inductance mutuelle Mentre SactSb
     hyp: pas de feite magnétique
               B= lo Naia (chemp uniforme your extra et rul à l'exterieur)
          flux dons No spire de So = lo Na la xII ra xNo con ra < r b et ?
                                          φ = μο Janbia Tra = Mia
                                    M = NO NAND ITTO
416. La= lo \frac{Na^2}{l}\pi\pi a^2
Lb= lo \frac{Nb^2}{l}\pi\pi b^2
                                 VLaLb = no NaNb Tranb
        M = no NaNh Tra2
                                 M = TLalb x na
Q17 \frac{La}{N_a^2} = \frac{Lb}{N_b^2}? Si \pi a = \pi b alow La = \mu b \frac{Na}{p} \pi \pi^2 al L_b = \mu b \frac{Nb^2}{p} \pi \pi
Q17 D'après le loi de dentz-Fareday \frac{La}{Na^2} = \frac{Lb}{f} = \frac{Lb}{Nb^2} CQF-D.
         la = - Na d d et ub = - Nb d d | Ma = La dia + M dib

Condition de conflage perfait: M2=LaLb. dt dt
                                                      voir Ende année.
```

# Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Nous allons étudier des dispositifs fonctionnant soit en générateur, quand ils transforment une puissance mécanique en puissance électrique, soit en moteur quand ils transforment une puissance électrique en puissance mécanique.

# I CONVERSION DE PUISSANCE MECANIQUE EN PUISSANCE ÉLECTRIQUE

# I-1. Rails de Laplace générateur

L'étude qui va suivre doit servir de modèle lorsqu'on aborde un système faisant intervenir à la fois le phénomène d'induction et un déplacement mécanique. On a déjà observé que l'application d'un courant dans un tel circuit permettait de mettre en mouvement la barre.

On va maintenant présenter le phénomène complet.

# Exercice : Générateur linéaire simple

Une barre conductrice de longueur l=0.5 m glisse à vitesse constante v=2 m/s sur deux rails conducteurs. Le tout est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme, de valeur B=0.2 T. La résistance du circuit fermé est  $R=1\Omega$ .

### **Questions:**

- 1. Calculer la f.é.m. induite.
- 2. Déterminer l'intensité du courant induit.
- 3. Calculer la force de Laplace exercée sur la barre.
- 4. Quelle est la puissance mécanique que doit fournir un agent extérieur pour maintenir la vitesse constante ?
- 5. Vérifier que cette puissance correspond à la puissance électrique dissipée dans la résistance.
- 6. Faire un bilan énergétique du système.

### Réponses:

- 1. f.é.m. induite:  $e = -d\Phi/dt$  soit en valeur absolue  $e = d(lBx)/dt = B l v = 0,2 \times 0,5 \times 2 = 0,2 V$ .
- 2. Courant induit : i = e/R = 0.2/1 = 0.2 A
- 3. Force de Laplace :  $F = I I B = 0.2 \times 0.5 \times 0.2 = 0.02 N$
- 4. Puissance mécanique (agent extérieur) :  $P_{méc} = F \cdot v = 0.02 \times 2 = 0.04 \text{ W}$
- 5. Puissance électrique :  $P_{\text{élec}} = RI^2 = 1 \times (0,2)^2 = 0,04 \text{ W}$
- 6. Bilan : toute la puissance mécanique est convertie en énergie électrique, dissipée dans la résistance.

# I-2 Freinage par induction

On l'a vu dans l'exemple précédent, la force magnétique qui peut apparaître à cause du phénomène d'induction s'oppose au mouvement du conducteur qui a été la cause du phénomène d'induction.

Quand une barre conductrice se déplace dans un champ magnétique, une tension (f.é.m.) est induite, ce qui génère un courant induit dans le circuit fermé.

Ce courant, circulant dans la barre plongée dans le champ magnétique, subit une force de Laplace. Cette force agit sur la barre et son sens est opposé au déplacement de la barre donc elle freine la barre.

Cela correspond exactement à ce que prédit la loi de Lenz : le phénomène induit (ici le courant) s'oppose à la cause qui l'a produit (le mouvement de la barre).

# Dès qu'il y a conversion de puissance mécanique en puissance électrique, l'action mécanique de Laplace est une action de freinage, conformément à la loi de Lenz.

Si on transforme de l'énergie mécanique (le mouvement de la barre) en énergie électrique (courant induit), alors il apparaît nécessairement une force de freinage (force de Laplace) qui s'oppose à ce mouvement. Pour maintenir la vitesse constante, il faut compenser cette force de freinage avec une force extérieure, ce qui exige une puissance mécanique continue.

Cela a plusieurs applications intéressantes :

- Freinage par induction sur les TGV ou les camions
- Récupération d'énergie lors de ce freinage, afin de convertir l'énergie cinétique du véhicule en énergie électrique (voitures hybrides).

https://youtu.be/AmCx172SmmI pendule freiné

https://youtu.be/MaP5vZB6yoU?si=Xx4n3syiZgHut-zZ plaque à induction

https://youtu.be/\_ZZMViMDjto?si=LcutZrG5rvG1CS72 le TGV (C'est pas sorcier)

### **Courants de Foucault**

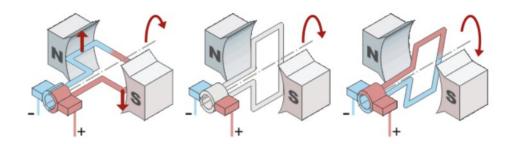
Lorsque le conducteur en mouvement n'est plus filiforme, la modélisation développée jusqu'à présent n'est plus valable, mais les phénomènes restent qualitativement les mêmes. Il y a apparition de courants induits à l'intérieur du conducteur, répartis dans tout le volume, et sont appelés courants de Foucault. Ces derniers provoquent, du fait du champ magnétique, des efforts de Laplace qui vont s'opposer au mouvement.

On retrouve également les courants de Foucault lorsque le conducteur est fixe mais le champ magnétique non stationnaire, l'exemple le plus simple étant la plaque à induction, où le courant induit provoque l'échauffement de la casserole.

# II CONVERSION DE PUISSANCE ÉLECTRIQUE EN PUISSANCE MÉCANIQUE

### Le moteur à courant continu

Schéma de principe :



Une spire (le rotor ou l'induit ) capable de tourner sur un axe de rotation est placée dans le champ magnétique créé par un aimant permanent ( l'inducteur ou le stator) .

Les deux conducteurs formant la spire sont chacun raccordés électriquement à un demi collecteur et alimentés en courant continu via deux balais frotteurs.

La force de Laplace créé un couple moteur .qui fait tourner la spire.

Quand la spire arrive dans sa position d'équilibre (verticale), le courant dans la spire est inversé grâce à une opération appelée commutation : chaque balai change de commutateur, ce qui permet de continuer la rotation.

Si le système balais-collecteurs n'était pas présent (simple spire alimentée en courant continu), la spire s'arrêterait de tourner en position verticale sur un axe appelé communément "ligne neutre".

Le système balais-collecteurs a pour rôle de faire commuter le sens du courant dans les deux conducteurs au passage de la ligne neutre.

Le courant étant inversé, les forces motrices sur les conducteurs le sont aussi permettant ainsi de poursuivre la rotation de la spire.

http://les-electroniciens.com/videos/le-principe-fonctionnement-d-un-moteur-courant-continu



Aspect	Barre mobile sur rails (générateur linéaire)	Spire tournante dans un champ magnétique (générateur rotatif)
Principe physique	Déplacement d'un conducteur dans un champ $ec{B}$	Rotation d'un conducteur dans un champ $ec{B}$
Origine de la f.é.m.	Force de Lorentz sur les charges mobiles	Loi de Faraday : variation du flux magnétique
Expression de la f.é.m.	$\mathcal{E}=Blv$	$\mathcal{E}(t) = BS\omega\sin(\omega t)$
Nature de la tension induite	Constante (si vitesse constante)	Sinusoïdale (courant alternatif)
Type de mouvement	Mouvement linéaire de la barre	Mouvement <b>rotatif</b> de la spire
Sens du courant induit	Donné par la règle de Lenz (s'oppose à la variation de flux)	Identique : courant s'oppose à la variation de flux
Force agissant sur le conducteur	Force de Laplace s'opposant au mouvement	Couple résistif électromagnétique
Conversion d'énergie	Mécanique → Électrique (avec dissipation par effet Joule)	Mécanique → Électrique (souvent vers réseau)
Applications	<ul><li>Freinage électromagnétique (trains, manèges)</li><li>Générateurs linéaires</li><li>Capteurs de vitesse</li></ul>	<ul><li>Alternateurs (centrales, voitures)</li><li>Éoliennes</li><li>Dynamos de vélo</li></ul>
Commentaires	Expérience simple à visualiser en laboratoire	Modèle industriel des générateurs de courant alternatif

# **PLAN**

# Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps

### I AUTO-INDUCTION

- <u>I-1</u>. Flux propre et inductance propre.
- <u>I-2. Inductance propre d'un solénoïde infini</u>
- I-3. Circuit électrique équivalent
- I-4. Bilan énergétique

### II INDUCTION ENTRE DEUX CIRCUITS

- II-1. Inductance mutuelle
- II-2. Exemple de calcul d'une inductance mutuelle
- II-3. Circuit électrique équivalent

III APPLICATION: extrait de CCS 2025

# Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

- I-1. Rails de Laplace générateur
- I-2 Freinage par induction

II CONVERSION DE PUISSANCE ÉLECTRIQUE EN PUISSANCE MÉCANIQUE

Le moteur à courant continu