M4 **Mouvement d’un solide en rotation autour d’un axe fixe**

Il s’agit de définir le mouvement en remarquant que tout point du solide décrit un cercle autour de l’axe avec une même vitesse angulaire et de déterminer la vitesse de chaque point en fonction de celle-ci et de la distance à l’axe de rotation. L’étude du mouvement d’un solide en rotation autour d’un axe gardant une direction fixe dans un référentiel galiléen mais pour lequel l’axe de rotation est en mouvement est exclue. Cette partie se termine par l’étude d’un système déformable pour souligner le rôle des forces intérieures dans le bilan énergétique d’un système.

Mouvement d’un solide en rotation	**autour d’un axe fixe**
Définition d’un solide	Différencier un solide d’un système déformable.
Rotation autour d’un axe fixe.	Décrire la trajectoire d’un point quelconque d’un solide en rotation autour d’un axe fixe et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l’axe et de la vitesse angulaire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d’un axe fixe. Moment cinétique scalaire d’un solide en rotation autour d’un axe. Moment d’inertie.	Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d’inertie fourni. Relier qualitativement le moment d’inertie à la répartition des masses.
Moment d’une force par rapport à un axe orienté. Couple	Exprimer le moment d’une force par rapport à un axe orienté, en privilégiant l’utilisation du bras de levier. Définir un couple de forces, le moment d’un couple.
Liaison pivot.	Définir une liaison pivot et justifier la valeur du moment qu’elle peut produire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d’un axe fixe orienté dans un référentiel galiléen. Pendule pesant.	Déterminer l’équation du mouvement, le moment d’inertie du solide par rapport à l’axe de rotation étant donné. Établir l’équation du mouvement. Établir une intégrale première
Approche énergétique du mouvement d’un solide autour d’un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen. Énergie cinétique d’un solide en rotation autour d’un axe fixe. Théorème de l’énergie cinétique pour un solide en rotation autour d’un axe fixe.	Utiliser l’expression de l’énergie cinétique, le moment d’inertie étant fourni. Établir, dans ce cas, l’équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l’énergie cinétique.
Système déformable Théorème de l’énergie cinétique pour un système déformable.	Prendre en compte le travail des forces intérieures. Utiliser sa nullité dans le cas d’un solide Réaliser le bilan énergétique du tabouret d’inertie.

I Cinématique du solide

I.1. Définition d'un solide

Un solide est un système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres : c'est un système **indéformable**.

On oppose les solides aux systèmes déformables dont les points peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres.

Par exemple, un ressort peut être comprimé ou étiré : c'est un système déformable.

Une boule de pétanque est un solide indéformable.

La répartition des masses dans un solide est en général, décrite de manière continue : le solide peut être découpé en éléments infinitésimaux de masse dm.

La masse totale du solide est alors donnée par m = $\iiint_{solide}$ dm (intégrale triple sur le volume du solide).

I.2. Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Un solide est en rotation autour d'un axe (*D*), droite fixe dans l'espace, si tous ses points sont en mouvement circulaire autour de (*D*).

Soit un point M du solide, à la distance r de l'axe (D) (avec r = HM où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation). Sa position est repérée par l'angle θ(t) par rapport à $\vec{u}_x$ (coordonnées polaires).

La vitesse angulaire de rotation du solide est donnée par : $\omega=\frac{d\theta}{dt}$

L'accélération angulaire de rotation du solide est donnée par : $\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$

La vitesse du point *M* s'obtient en utilisant les coordonnées polaires.

On a $\vec{HM}=r\,\vec{u}_r$ où seul $\vec{u}_r$ est variable, r = R = constante (rayon du cercle trajectoire).

D'où l'expression de la vitesse : $\vec{v}=R\omega\vec{u}_\theta=R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$ $\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right)$

Ainsi,tous les points situés sur l'axe de rotation (tels que *r* = 0) ont une vitesse nulle ; ils sont immobiles.

L'accélération du point *M* est donnée par :

$$\vec{v}=R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\theta+R\omega\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\theta-R\omega^2\vec{u}_r \qquad \left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=\frac{-d\theta}{dt}\vec{u}_r\right)$$

Tous les points du solide ont les mêmes vitesse et accélération angulaires mais ils ont une vitesse d'autant plus plus grande en norme qu'ils sont plus éloignés de l'axe de rotation.

N.B. : l'axe de rotation n'est pas nécessairement situé à l'intérieur du solide.

II. Dynamique du solide en rotation autour d'un axe fixe

La seconde loi de Newton relie la variation de la quantité de mouvement aux forces appliquées au système (ponctuel ou solide).

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_i \vec{F}_i \quad \text{avec} \quad \vec{p}=m\vec{v}$$

La dérivée de la grandeur cinématique = grandeur dynamique.

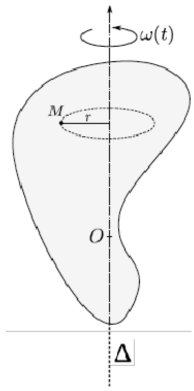
Pour les systèmes en rotation, la notion de force n'est pas toujours la plus appropriée.

Par exemple, lorsqu'on cherche à ouvrir une porte, on applique une force sur la poignée. Pour être efficace, la force doit être appliquée le plus loin possible des gonds de la porte, perpendiculairement à la porte. Cette configuration permet de maximiser le bras de levier de la force, qui est la distance séparant l'axe de rotation de la porte de la droite d'application de la force.

II.1. Moment d'inertie

Soit un solide en rotation à la vitesse angulaire de rotation $\omega(t)$ autour de l'axe $(D) = (O, \ \vec{u}_\Delta)$.

Le moment d'inertie J_D d'un solide S par rapport à l'axe (D) est donné par :



(1) $J_\Delta=\sum m_i r_i^2$ avec $M_i \in S$ ou encore,

(2) $J_\Delta=\int dm\, r^2$

(1) pour un solide discret (quelques points matériels $M_i \in S$) ; r_i est la distance du point M_i à l'axe (Δ)

(2) pour un solide continu ; r est la distance entre chaque point M du solide et Δ.

Le solide est un ensemble discret de points matériels mais tellement proches, qu'indéformable ou non, il peut être considéré comme continu du point de vue macroscopique.

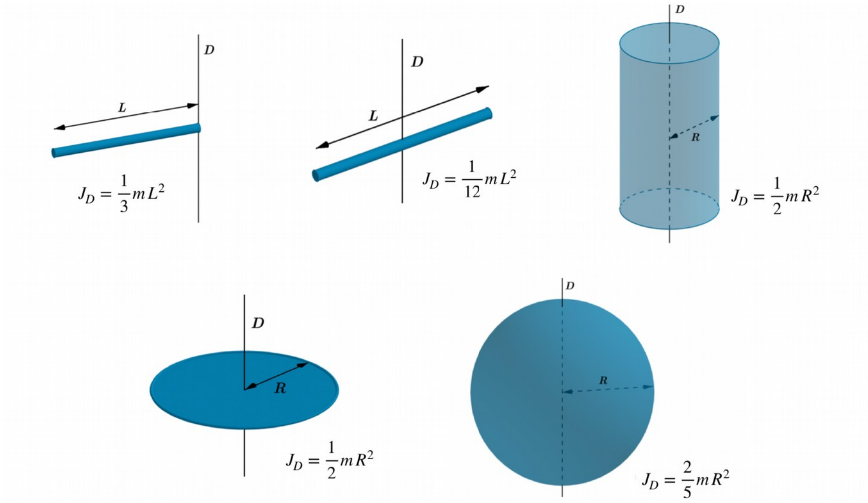
Ainsi toutes les ***sommes discrètes*** qui apparaîtront dans le traitement du solide pourront être transformées en ***intégrales*** sur la structure solide : une intégrale simple ou surfacique ou volumique selon le solide.

Le moment d'inertie est exprimé en $kg.m^2$.

C'est une caractéristique du solide qui renseigne à la fois sur la répartition des masses et sur les distances de celles-ci à l'axe de rotation (pas de contribution au moment d'inertie des masses situées sur l'axe). Il est d'autant plus grand que la masse est éloignée de l'axe.

Il traduit l'inertie du corps vis à vis d'un mouvement de rotation autour de l'axe.

Exemples pour quelques solides homogènes :



II.2. <u>Moment cinétique par rapport à l'axe (*D*)</u>

Le moment cinétique du solide *S* en rotation autour de l'axe (*D*) fixe à la vitesse angulaire *ω* est :

$$\sigma_D(S) = J_D\, \omega$$

$\sigma_D(S)$ est parfois noté $L_D(S)$

II.3. <u>Moment d'une force (ou action extérieure)</u>

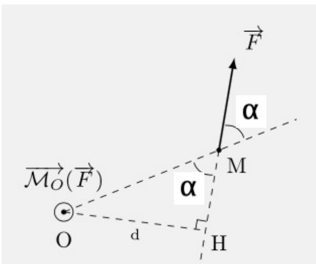
II.3.1. Définitions

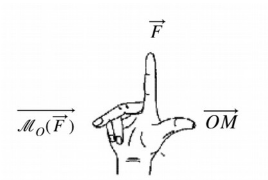
Soit un point *M* soumis à une force $\vec{F}$.

Le moment de la force $\vec{F}$, par rapport à un point *O* fixe du référentiel d'étude, est défini par :

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{F}) \text{ est aussi noté } \vec{M}_O(\vec{F})$$





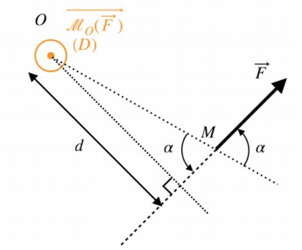
La force a tendance à faire tourner le point M autour de O.
Le moment de la force est le résultat d'un produit vectoriel. Par définition, c'est un vecteur perpendiculaire à $\vec{OM}$ et $\vec{F}$ donc perpendiculaire au plan de la feuille.
On peut utiliser la règle de la main droite pour trouver sa direction et son sens .
Dans le cas de l'exemple précédent, le moment de la force $\vec{F}$ pointe vers l'avant de la feuille (vers nous), ce qu'on symbolise par ⊙ .

On définit aussi , le moment scalaire d'une force par rapport à l'axe $(D) = (O, \vec{u}_D)$: projection du moment vectoriel sur l'axe (*D*), soit :
(produit scalaire)

$$\Gamma_D(M) = (\vec{OM} \wedge \vec{F}) . \vec{u}_D$$

Unité : N.m

Le moment de la force par rapport à l'axe traduit la capacité de la force à faire tourner le point M autour de l'axe D.



- $\mathcal{M}_D\left(\vec{F}\right) > 0$ pour $\alpha \in]0, \pi[\;\Rightarrow \vec{F}$ a tendance à faire tourner le point M dans le sens trigonométrique autour de l'axe (D) ;
- $\mathcal{M}_D\left(\vec{F}\right) < 0$ pour $\alpha \in]-\pi, 0[\;\Rightarrow \vec{F}$ a tendance à faire tourner le point M dans le sens horaire autour de l'axe (D).

Pour une force située dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation,

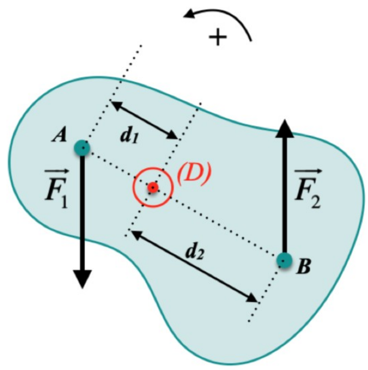
$$\Gamma_D(M) = (\vec{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u_D} = +/- F.d$$

d est le **bras de levier,** distance entre la droite support de $\vec{F}$ et l'axe (D).

Une force a un moment nul par rapport à l'axe (D) si elle est parallèle à l'axe (D) ou si son support coupe l'axe (D).

On oriente arbitrairement l'axe, le signe est positif si cette force tend à faire tourner M dans le sens positif, négatif sinon.

II.3.2. Notion de couple



Deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ opposées s'appliquant respectivement en A et B forment un **couple de forces**.

Leur résultante $\vec{F}$ est nulle : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

Ces forces sont de même norme et s'appliquent sur des droites d'action parallèles. Elles ont tendance à faire tourner le solide.

On a $\Gamma_D(\vec{F}) = Fd_1 + Fd_2 = F(d_1 + d_2) = F \times AB.$

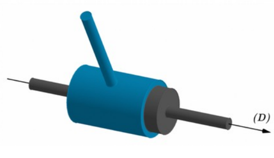
On désigne souvent par couple le moment du couple par rapport à (D) et on le note $\mathcal{C}$. Si le couple fait tourner le solide dans le sens défini comme positif alors $\mathcal{C} > 0$. Dans le cas contraire, on a $\mathcal{C} < 0$.

Un couple est un ensemble de forces de résultante nulle mais dont la somme des moments est non nulle.

II.3.3. Liaison pivot

En général, si un solide possède un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, il existe un dispositif mécanique permettant au solide de rester lié à l'axe.

On appelle liaison pivot un mécanisme ne laissant au solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un certain axe. (Exemple : pédale de vélo).



Si la liaison pivot est géométriquement idéale, elle assure un guidage parfait de la rotation autour de l'axe de liaison et bloque toute translation le long de cet axe.

Le solide subit de la part du mécanisme une réaction $\vec{R}_{axe}$ et son moment $\Gamma_D(\vec{R}_{axe})$.

S'il existe des frottements, le pivot exerce alors un couple de frottement dont le moment scalaire est non nul. Le couple résistant.

En l'absence de frottement, le pivot est dit **parfait** , la résultante rencontre alors l'axe de rotation et finalement le moment scalaire de l'action de liaison par rapport à l'axe de rotation est nul. $\Gamma_D(\vec{R}_{axe})=0$

Rappels http://jeanclaude.deponte.free.fr/animation/liaison/accueil-liaison.htm

II.4. Théorème du moment cinétique scalaire (TMC)

Dans un référentiel galiléen, pour un solide *S* en rotation autour d'un axe (*D*) et d'inertie J_D, on a :

$$\boxed{\frac{d\sigma_D}{dt}=\sum\Gamma_D(\vec{F}_{ext}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\omega J_D}{dt}=J_D\frac{d\omega}{dt}=\sum\Gamma_D(\vec{F}_{ext})}$$

L'application du théorème conduit à une équation différentielle en *ω* ($\frac{d\theta}{dt}$) que l'on doit résoudre pour obtenir la loi d'évolution de la vitesse angulaire de rotation ou de l'angle θ.

III. Energétique du solide en rotation autour d'un axe fixe

III.1. Energie cinétique d'un solide en rotation

L'énergie cinétique d'un solide de moment d'inertie *J*, en rotation autour d'un axe (*D*) dans un référentiel R est donnée par :

$$E_c=\frac{1}{2}J_D\omega^2$$

III.2. Puissance d'une force et théorème de la puissance cinétique (loi de l'énergie cinétique)

La puissance d'une force $\vec{F}_i$ appliquée en un point M_i d'un solide en rotation autour d'un axe D est donnée par :

$$P(\vec{F}_i)=\Gamma_D(\vec{F}_i)\omega$$

La puissance des forces intérieures d'un solide sont nulles.

Puissance d'un couple : P = C ω

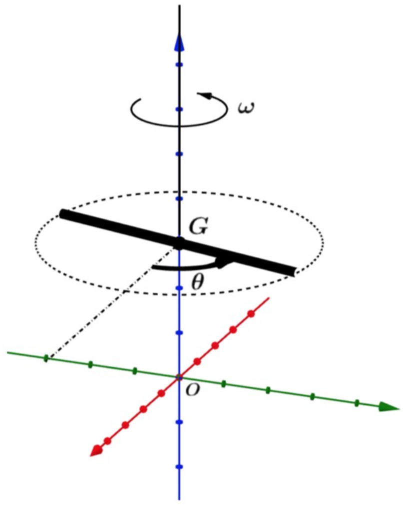
Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe (*D*) est égale à la puissance des forces qui s'appliquent au solide :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt}=\sum P(\vec{F}_i) \quad \text{ou encore } \Delta E_c=\sum W(\vec{F}_i)}$$

III.3. Exemple : pendule de torsion

Un pendule de torsion est constitué d'un solide accroché à un fil vertical et pouvant tourner autour de l'axe (*D*) confondu avec le fil. Le barycentre *G* (ou centre de masse ou centre d'inertie) se trouve sur le fil et on note *J* le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (*D*).

Lorsque l'angle de rotation a une valeur θ, le fil exerce sur le solide un couple de torsion de moment M = − C θ (*C* étant sa constante de torsion).



Les autres forces extérieures appliquées sont :

- son poids (appliqué en G et de moment nul car $\vec{OG}$ est parallèle à $\vec{P}$),

- la réaction du fil, empêchant le solide de tomber (aussi de moment nul car $\vec{OG}$ est parallèle à $\vec{R}$).

L’énergie cinétique du solide est : $E_c = \frac{1}{2} J_D \omega^2 = \frac{1}{2} J_D (\frac{d\Theta}{dt})^2$

Les puissance de $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont nulles (moments nuls).

La puissance du couple de torsion vaut :

$$P_{(torsion)} = M_D\ \omega = -C\,\Theta\ \frac{d\Theta}{dt}$$

En appliquant la loi de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathscr{P}\left(\vec{f_i}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right)}{\mathrm{d}t} = -C\theta\dot{\theta}$$
$$\Leftrightarrow J\dot{\theta}\ddot{\theta} = -C\theta\dot{\theta}$$
$$\Leftrightarrow \dot{\theta}\left(J\ddot{\theta} + C\theta\right) = 0$$

Alors, soit $\frac{d\Theta}{dt} = 0$ $\forall t$ et le solide est à l'équilibre, soit $\frac{d\Theta^2}{dt^2} + \frac{C}{J}\theta = 0$ *:* équation différentielle du mouvement .

Il s’agit de l’oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{(\frac{C}{J})}$

III.4. Système déformable

TABOURET D’INERTIE

Une personne est assise sur un tabouret dont le siège peut tourner quasiment sans frottement autour d'un axe vertical (*D*).

La personne se met en rotation, les bras tendus, à la vitesse angulaire ω_1 (état 1).

Ensuite, elle replie les bras et sa rotation se fait à une vitesse différente ω_2 (état 2).

https://youtu.be/tDa8rONMd7E

On constate qu'un rapprochement des haltères de l'axe de rotation augmente la vitesse de rotation : c'est une conséquence de la conservation du moment cinétique σ_D du système {personne + haltères + tabouret} (le poids, parallèle à l'axe (*D*) a un moment nul, même chose pour la réaction du support de l'axe et la liaison pivot tabouret par rapport à l'axe (*D*) est supposée idéale).

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\ \omega_1.$$

Or $J_1 > J_2$ (masses réparties plus loin de l'axe de rotation) donc $\omega_2 > \omega_1$. La vitesse angulaire de rotation augmente. Il existe des variantes de cette expérience (avec roue en rotation, lâcher de masses …) mais l'explication repose encore sur la conservation du moment cinétique.

https://youtu.be/-WhtfqoStNw

De la même façon, un patineur joue de ses bras quand il tourne sur lui même en l'air ou sur la glace. Ces effets n'ont pas qu'une finalité artistique. Le patineur applique en fait un principe physique qui lui permet, d'un mouvement de bras, d'augmenter considérablement sa vitesse de rotation et éventuellement sa note, s'il ne se casse pas la figure juste après. Pour se transformer en toupie humaine le secret du patineur ne se trouve pas uniquement dans l'action de ses patins. Le patineur ramène ses bras sur son torse au début de sa rotation. Et les écarte à nouveau pour freiner son mouvement. En modifiant la position de ses bras le patineur modifie ce que l'on appelle, le moment d'inertie. Plus le moment d'inertie du patineur diminue plus la vitesse de rotation augmente. La masse du patineur est répartie autour de son axe de rotation qui va de la tête jusqu'aux pieds. Bras tendus, la masse des bras est plus éloignée de l'axe de rotation, augmentant ainsi le moment d'inertie. Lorsque le patineur les ramène sur son torse le moment d'inertie diminue. Les variations du moment d'inertie sont d'autant plus importantes dans ce cas que celui-ci dépend du carré de la distance entre la masse et l'axe de rotation. Un ordre de grandeur est calculable si l'on modélise la danseuse par un cylindre dont la section est un disque de diamètre D égal à la distance séparant les deux épaules de la danseuse.Pour D égal à 30 cm, pour une masse de la danseuse de 55 kg, une masse et une longueur de bras (tendu) de 3,5 kg et de 50 cm respectivement, la danseuse peut tripler sa vitesse de rotation. Elle passe par exemple d'une valeur courante de 1 tour par seconde, bras tendus, à 3 tours par seconde lorsque les bras longent le corps !

Faites le test avec un balai. Il est beaucoup plus aisé de le faire tourner rapidement selon l'axe vertical (de la poignée jusqu'à la brosse) plutôt que selon l'axe passant par le milieu du manche - façon moine shaoling . Dans le premier cas, la masse du balai est beaucoup plus proche de l'axe que dans le second, et donc le moment d'inertie moins important.

Pour un système déformable, la loi de la puissance cinétique et celle de l'énergie cinétique se reformulent en tenant compte des forces intérieures au système. Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un système déformable en rotation autour d'un axe (*D*) est égale à la puissance des forces qui s'appliquent au et dans le système :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P(\vec{F}_{ext}) + P(\vec{F}_{inter})$$ ou encore , sous forme intégrale

$$\Delta Ec = \sum W(\vec{F}_{ext}) + W(\vec{F}_{inter})$$

PLAN

Mouvement	Translation	Rotation autour d'un axe
Inertie	Masse	Moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation
Vitesse	Vecteur vitesse	Vitesse angulaire
Grandeur cinématique	Quantité de mouvement $\vec{p}=m\vec{v}$	Moment cinétique $\sigma_D(S) = J_D\ \omega$
Grandeur dynamique	Résultante des forces	Somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation.
Relation à appliquer	La dérivée de la grandeur cinématique = grandeur dynamique. 2nde loi de Newton	La dérivée de la grandeur cinématique = grandeur dynamique. Théorème du moment cinétique scalaire
Energie cinétique	$E_c=\frac{1}{2}m\,v^2$	$E_c=\frac{1}{2}J_D\,\omega^2$