Exercices S4: oscillateurs harmoniques

Exercice n°1

1. Mettez sous forme canonique les 3 équations d'oscillateur harmonique suivantes:

(a) $m \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\,x$ (b) $E = U + LC \dfrac{d^2U}{dt^2}$ (c) $0 = \dfrac{i}{C} + L \dfrac{d^2i}{dt^2}$

2. Identifier la pulsation propre de chacun des systèmes.

3. Parmi les équations suivantes dire celles qui sont des oscillateurs harmoniques et identifier leur pulsation propre si elles en ont une. Toutes les grandeurs données sont positives.

(a) $\dfrac{d^2}{dt^2}\theta + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0$ (b) $\dfrac{d^2}{dt^2}\theta + \dfrac{g}{l}\theta = 0$ (c) $\dfrac{d^2z}{dt^2} - a\,z = a\,z_0$

Exercice n°2

1. On considère un système masse-ressort vertical dans le champ de pesanteur : une masse m est suspendue à un ressort idéal (masse négligeable, longueur à vide l_0, raideur k), accroché au point fixe O. L'équation donnant l'évolution de l'altitude z(t) de la masse par rapport à l'altitude du point O pris comme référence s'écrit : $m \dfrac{d^2z}{dt^2} = -k\,(z - l_0) + mg$ où g est l'accélération de la pesanteur.

a. Cette équation est-elle du type harmonique ?

b. La mettre sous forme canonique. En déduire l'expression de la période des oscillations de la masse ainsi que sa position d'équilibre.

2.

On considère un pendule pensant : une barre homogène de masse m, de longueur 2L est accrochée en une de ses extrémités à un point fixe O. Si la liaison en O est parfaite, l'équation donnant l'évolution de l'angle θ que fait la direction de la barre avec la verticale s'écrit alors :

$$4mL^2 \frac{d^2}{dt^2}\theta = -3mgL\sin\theta \;.\; \ddot{}$$

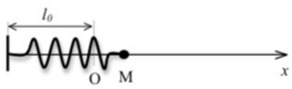
a. Cette équation est-elle du type harmonique ?

b. Comment est-elle modifiée si l'on considère que les oscillations du pendule sont limitées aux petits angles ?

c. En déduire, dans ce dernier cas, l'expression de la période des oscillations ainsi que la position d'équilibre.

Exercice n°3

Un point matériel M de masse m est astreint à se déplacer **sans frottement** sur une tige, le long de l'axe (Ox) horizontal. Il est lié à l'extrémité d'un ressort de raideur **k** et de longueur à vide l_0, l'autre extrémité étant fixe.

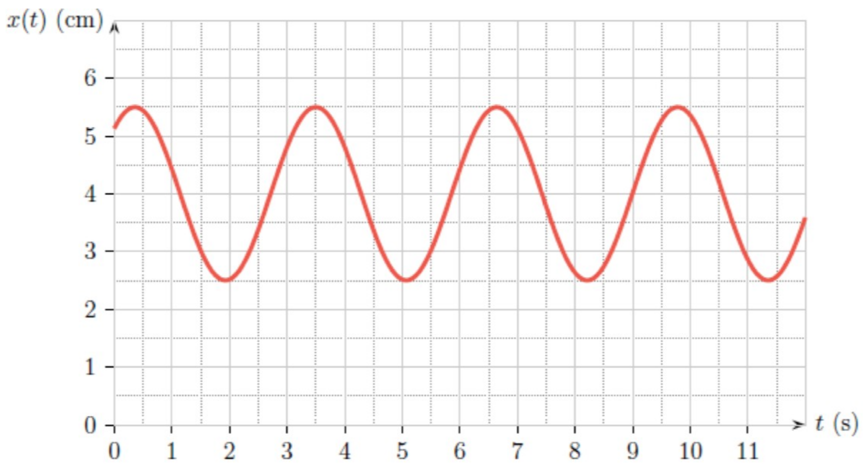


On note $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire de l'axe Ox tel que $\overrightarrow{OM} = x(t)\ \vec{u}_x$. A l'équilibre, le solide occupe la position O d'abscisse x = 0.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par x(t) et définir la pulsation propre de ce système.
2. A l'instant t = 0, on écarte M du point O d'une distance X_0 et on le lâche sans vitesse initiale. Donner l'évolution exacte de sa position x(t).
3. Entre quelles abscisses extrémales évolue la masse ?
4. Quelle est la période du mouvement ?
5. Tracer la variation de cette fonction au cours du temps en indiquant les points remarquables.

Exercice n°4

1. Déterminer l'amplitude, la période, la fréquence et la valeur moyenne du signal représenté ci- dessous.



2. Il s'agit en fait de la longueur x(t) = l(t) d'un ressort de constante de raideur k, relié à un point M de masse m = 20 kg. La masse se déplace horizontalement.

a. Déterminer graphiquement la valeur de la position d'équilibre x_{eq}.
b. Déterminer graphiquement la valeur maximale de la vitesse du mobile.
c. Estimer la valeur de l'énergie mécanique du système masse+ressort.
d. Estimer la valeur de la constante de raideur.