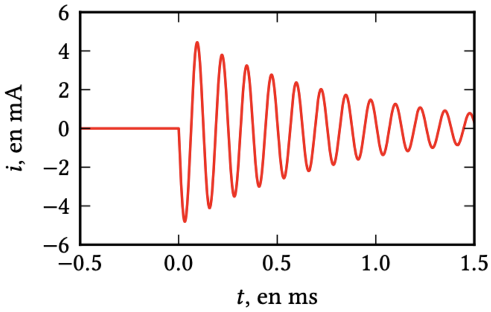
ANALYSE DE RELEVÉ EXPÉRIMENTAL

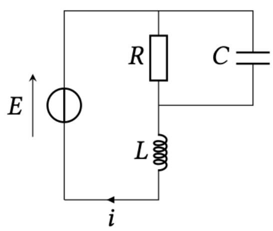
inspiré du site de Thibierge MPSI 2



La courbe ci-contre représente le courant mesuré dans un circuit formé d'une bobine et d'un condensateur montés en série avec un générateur imposant un échelon de tension. On admet que la bobine est très bien décrite par une bobine idéale, mais pas le générateur, de résistance interne $r = 50\ \Omega$.

Analyser la courbe pour déterminer la hauteur E de l'échelon de tension, l'inductance L et la capacité C.

ENCORE UN RLC



Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.

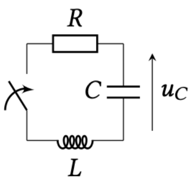
1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

2 - L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

3 - Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

4 - En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

RLC EN RÉGIME LIBRE

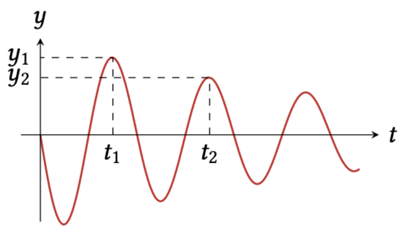


On étudie le circuit ci-contre où le condensateur est initialement chargé : $u_C(t=0) = U_0$.

1 - Déterminer les valeurs de i, de u_C et de u_L à la fermeture du circuit en $t = 0^+$, puis en régime permanent pour $t \to \infty$.

2 - Parmi ces grandeurs, laquelle correspond à y représentée ci-contre ? Comment doit-on procéder pour la mesurer ? Indiquer sur le schéma les branchements de l'oscilloscope.

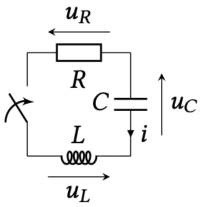
3 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant i en fonction de $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $m = R/2L\omega_0$.



4 - On suppose $m < 1$. Déterminer la solution en fonction de $\Omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$. Que représente Ω ? Comment peut-on l'évaluer à partir de la courbe ?

5 - En utilisant des approximations adéquates, trouver une relation simple entre le rapport y_1/y_2 et m.

Corrigé RLC EN RÉGIME LIBRE



Les notations des courants et tensions ne sont pas explicitées sur le schéma par l'énoncé, auquel cas il est sous-entendu que toutes les tensions sont orientées de façon cohérente avec u_C et que les dipôles sont orientés en convention récepteur.

1 L'intensité i est continue car elle traverse une bobine. Ainsi,

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$$

car le circuit est ouvert à $t < 0$. De même, la tension u_C est nécessairement continue car aux bornes du condensateur donc

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0}$$

Enfin, la tension aux bornes de la bobine se déduit de la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et de la loi d'Ohm,

$$u_R(0^+) + u_C(0^+) + u_L(0^+) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_L(0^+) = -u_C(0^+) = -U_0\,.}$$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc

$$\boxed{i_\infty = 0\,.}$$

La bobine est équivalente à un fil, si bien que

$$\boxed{u_{L,\infty} = 0}$$

et d'après la loi des mailles on en déduit

$$u_{R,\infty} + u_{C,\infty} + u_{L,\infty} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_{C,\infty} = 0\,.}$$

2 D'après le comportement à $t = 0$, on en déduit que **la grandeur y correspond à l'intensité i**. Un oscilloscope ne peut pas mesurer directement une intensité, il faut donc mesurer une tension qui lui est proportionnelle, c'est-à-dire la tension aux bornes de la résistance. Obtenir la courbe représentant y en fonction de t demande donc **de brancher l'oscilloscope en parallèle de la résistance**.

> *Ici, il n'y a aucun appareil branché sur le secteur type GBF, donc pas de conflit de masse à craindre.*

3 D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_C + u_L = 0 \qquad \text{soit} \qquad Ri + u_C + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

en utilisant les lois de comportement. Pour pouvoir relier u_C à i, il est nécessaire dériver,

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0\,.$$

Écrivons maintenant cette équation sous forme canonique pour faire apparaître les paramètres cherchés,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0\,.$$

On identifie alors $1/LC = {\omega_0}^2$ et $R/L = 2m\omega_0$ d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0\,.}$$

$\boxed{4}$ **Forme générale des solutions :** L'équation différentielle est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à déterminer (une autre formulation possible est de dire qu'elle est nulle). Pour déterminer la forme générale de la solution homogène, trouvons les racines du polynôme caractéristique,

$$r^2 + 2m\omega_0\, r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$4m^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2(m^2 - 1) < 0$$

car $m < 1$. Ainsi, les racines sont complexes conjuguées et valent

$$r_\pm = -\frac{2m\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4{\omega_0}^2(1-m^2)}}{2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\Omega\,.$$

Comme le discriminant de l'équation caractéristique est négatif alors le régime est pseudo-périodique et les solutions s'écrivent toutes sous la forme

$$i(t) = [A\cos\Omega t + B\sin\Omega t]\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

Conditions initiales : Déterminons maintenant les conditions initiales nécessaires pour trouver les constantes A et B. D'après la question 1,

$$i(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{1}{L}u_L(0^+) = -\frac{U_0}{L}\,.$$

Constantes d'intégration : Ainsi, la condition initiale sur i donne

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0\,.$$

En considérant directement $A = 0$ pour calculer la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t} - m\omega_0 B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\\text{sol}}}{=} B\Omega \underset{\substack{\uparrow\\\text{CI}}}{=} -\frac{U_0}{L} \qquad \text{d'où} \qquad B = -\frac{U_0}{L\Omega}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = -\frac{U_0}{L\Omega}\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}\,.}$$

L'intensité est pseudo-périodique, et Ω **est sa pseudo-période.** On peut l'évaluer à partir de la pseudo-période T' lisible sur la courbe. Par exemple, $T' = t_2 - t_1$ d'où

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}\,.}$$

$\boxed{5}$ Trouver la position des maxima n'est pas simple du tout à cause de l'amortissement exponentiel, qui complique beaucoup la recherche des zéros de la dérivée. Cependant, compte tenu de la courbe donnée, on peut faire l'approximation que la position des maxima est directement donnée par ceux du sinus car l'amortissement est faible. Ainsi, le k-ième maximum est atteint lorsque

$$\Omega t_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{soit} \qquad t = \frac{3}{4}T' + (k-1)T'$$

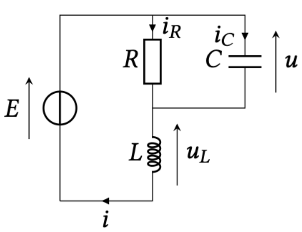
avec k un entier. y_1 et y_2 correspondent aux deux premiers maxima, aux instants $t_1 = 3T'/4$ et $t_2 = 7T'/4$. Ainsi,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\mathrm{e}^{-7m\omega_0 T'/4}}{\mathrm{e}^{-3m\omega_0 T'/4}} = \mathrm{e}^{-m\omega_0 T'}$$

Pour aboutir à une relation encore plus simple (je ne sais pas ce qu'attendait l'examinateur, qui l'aurait précisé au candidat au cour de l'oral) , on peut supposer $m \ll 1$, auquel cas $\Omega \sim \omega_0$ et donc $T' \simeq 2\pi/\omega_0$. Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} \simeq \mathrm{e}^{-2\pi m}\,.}$$

Corrigé ENCORE UN RLC



$\boxed{1}$ Le circuit est à deux mailles, il faudra donc utiliser les deux lois de Kirchoff pour établir l'équation différentielle. Commençons par exemple par la loi des nœuds,

$$i = i_R + i_C$$

Utilisons ensuite les lois de comportement pour faire apparaître la tension u, commune à R et C qui sont montés en parallèle,

$$i = \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

La loi des mailles permet ensuite d'exprimer la tension u en termes de la tension u_L : $u = E - u_L$. Ainsi, comme la tension E est constante,

$$i = \frac{E}{R} - \frac{u_L}{R} - C\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\,.$$

Enfin, d'après la loi de comportement de la bobine,

$$\boxed{i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}\,.}$$

$\boxed{2}$ Réécrivons l'équation en mettant à 1 le préfacteur devant la dérivée d'ordre le plus élevé,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = \frac{E}{RLC}\,. \qquad \text{à identifier à} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = \frac{E}{RLC}\,.$$

Ainsi, on est amené à poser

$$\begin{cases} {\omega_0}^2 = \dfrac{1}{LC} & \text{d'où} \qquad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\[2mm] \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{RC} & \text{d'où} \qquad Q = RC\omega_0 = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} \end{cases}$$

ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur, elle correspond à la pulsation qu'auraient les oscillations si elles étaient harmonique. Q est son **facteur de qualité**, qui décrit l'écart entre l'oscillateur et un oscillateur harmonique.

3 Analysons le régime permanent à $t = 0^-$, où le forçage est nul. Ce régime est continu, donc la bobine y est équivalente à un fil. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$0 = u(0^-) + 0 \qquad \text{donc} \qquad u(0^-) = 0\,.$$

Par ailleurs, d'après la loi des nœuds,

$$i(0^-) = i_R(0^-) + i_C(0^-) = \frac{u(0^-)}{R} + 0 = 0$$

puisque $i_C(0^-) = 0$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Analysons maintenant le circuit à $t = 0^+$. Par continuité du courant traversant une bobine, on déduit directement

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0\,.}$$

Pour trouver la valeur de $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, il faut trouver la valeur de $u_L(0^+)$. Comme on cherche une tension, on utilise la loi des mailles à $t = 0^+$,

$$E = u(0^+) + u_L(0^+)\,.$$

Or en tant que tension aux bornes d'un condensateur $u(0^+)$ est continue et égale à $u(0^+) = u(0^-) = 0$, d'où

$$u_L(0^+) = E \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{L}\,.}$$

4 **Forme générale des solutions :** Le courant $i(t)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle complète et d'une solution de l'équation homogène. Comme le forçage (qui se lit dans le second membre) est constant, le régime permanent (qui se lit dans la solution particulière) est constant aussi. La solution particulière est donc telle que

$$0 + 0 + \frac{1}{LC}\,i_\mathrm{p} = \frac{E}{RLC} \qquad \text{d'où} \qquad i_\mathrm{p} = \frac{E}{R}$$

Pour trouver la solution homogène, écrivons l'équation caractéristique,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = {\omega_0}^2\left(\frac{1}{4} - 4\right) = -\frac{15}{4}{\omega_0}^2 < 0 \qquad \text{car } Q = 2\,.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées,

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{4} \pm \mathrm{i}\frac{\omega_0}{4}\sqrt{15} \qquad \text{qu'on note} \qquad r_{1,2} = -\mu \pm \mathrm{i}\omega_\mathrm{p}$$

où $\mu > 0$ est le taux d'amortissement et ω_p la pseudo-pulsation des oscillations. La solution homogène s'écrit alors

$$i_\mathrm{h}(t) = \left[A\cos(\omega_\mathrm{p} t) + B\sin(\omega_\mathrm{p} t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t}\,,$$

avec A et B deux constantes.

> *Attention aux signes :* $\mu > 0$ *et* $\omega_p > 0$.

Corrigé ANALYSE D'UN RELEVÉ EXPÉRIMENTAL

Trois paramètres sont à déterminer par lecture de la courbe : E, L et C. Sur cette courbe, trois caractéristiques sont aisément mesurables : le temps caractéristique τ d'amortissement des oscillations, leur pseudo-période T_p et leur amplitude à l'instant initial $t = 0$ (en toute rigueur à t légèrement supérieur à zéro). Il faut donc relier entre eux ces paramètres.

Le générateur est dit non-idéal : il faut donc le modéliser par une source idéale de tension montée en série avec une résistance $R = 50\,\Omega$. Le circuit est donc un circuit RLC série soumis à un échelon, dans lequel on établit facilement l'équation différentielle portant sur le courant i,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{cases}$$

La courbe donne des oscillations, le régime est donc pseudo-périodique. Le courant $i(t)$ s'écrit donc sous la forme

$$i(t) = \left[A\cos(\omega_\mathrm{p} t) + B\sin(\omega_\mathrm{p} t)\right] \mathrm{e}^{-\mu t} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \mu = \dfrac{\omega_0}{2Q} \\ \omega_\mathrm{p} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} \end{cases}$$

On compte sur la courbe huit oscillations en 1 ms, d'où

$$T_\mathrm{p} = 0{,}12\,\mathrm{ms} \qquad \text{donc} \qquad \omega_\mathrm{p} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{p}} = 5{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Par ailleurs, on lit graphiquement que le temps $\tau = 1/\mu$ au bout duquel l'enveloppe exponentielle des oscillations atteint 37 % de sa valeur initiale (exponentielle décroissante avec valeur asymptotique nulle) vaut $\tau = 0{,}8\,\mathrm{ms}$, d'où

$$\tau = 0{,}8\,\mathrm{ms} \qquad \text{d'où} \qquad \mu = \frac{1}{\tau} = 1{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$$

En inversant les relations donnant μ et ω_p, on trouve

$$\omega_0 = \sqrt{{\omega_\mathrm{p}}^2 + \mu^2} = 5{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad Q = 20$$

Ces résultats sont conformes à ce que l'on peut attendre : rappelons que Q compte le nombre d'oscillations dans le régime transitoire, dont il est raisonnable qu'il soit de l'ordre de 20 à 30. Puis, compte tenu de la valeur de Q, il est normal d'avoir $\omega_\mathrm{p} \simeq \omega_0$. En inversant les relations donnant Q et ω_0 en fonction des valeurs composants, on trouve

$$\boxed{L = \frac{RQ}{\omega_0} = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{H} \qquad \text{et} \qquad C = \frac{1}{R\,Q\,\omega_0} = 2{,}0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{F}\,.}$$

Il reste enfin à trouver l'amplitude E de l'échelon de tension. Les conditions initiales pour ce circuit soumis à un échelon passant de E_1 à E_2 se déterminent comme d'habitude avec les relations de continuité et donnent

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

en ce qui concerne l'intensité. En ce qui concerne sa dérivée, elle s'obtient via la tension aux bornes de la bobine. Comme la tension aux bornes du condensateur vaut E_1 à $t = 0^-$, alors la loi des mailles donne à $t = 0^+$

$$E_2 = u_R(0^+) + u_L(0^+) + u_C(0^+) = R\,i(0^+) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) + u_C(0^-) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) + E_1 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{L}\,.$$

Il est donc seulement possible de déterminer *la hauteur* $E = E_2 - E_1$ de l'échelon, mais pas les valeurs initiale et finale de la tension imposée par le générateur. On peut alors en déduire par la méthode usuelle

$$A = 0 \qquad \text{et} \qquad B = \frac{E}{L\,\omega_\mathrm{p}}$$

soit

$$i(t) = \frac{E}{L\,\omega_\mathrm{p}} \sin(\omega_\mathrm{p} t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}\,.$$

Comme $T_\mathrm{p} \ll \tau$, la valeur de $E/L\,\omega_\mathrm{p}$ correspond en bonne approximation à la valeur de i à son premier extrêmum, soit

$$\frac{E}{L\,\omega_\mathrm{p}} \simeq i_\mathrm{min} \simeq -5\,\mathrm{mA} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E = L\,\omega_\mathrm{p}\,i_\mathrm{min} = -5\,\mathrm{V}\,.}$$

On peut s'assurer que $E < 0$ à partir du signe de la dérivée en $t = 0^+$.

En regroupant,

$$i(t) = i_{\mathrm{p}} + i_{\mathrm{h}}(t) = \frac{E}{R} + \left[A\cos(\omega_{\mathrm{p}}t) + B\sin(\omega_{\mathrm{p}}t)\right] \mathrm{e}^{-\mu t}\,.$$

Détermination des constantes : On a d'abord

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} \frac{E}{R} + A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad A = -\frac{E}{R}$$

Calculons maintenant la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega_{\mathrm{p}}\left[-A\sin(\omega_{\mathrm{p}}t) + B\cos(\omega_{\mathrm{p}}t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t} - \mu\left[A\cos(\omega_{\mathrm{p}}t) + B\sin(\omega_{\mathrm{p}}t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t}$$

ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} B\omega_{\mathrm{p}} - \mu A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} \frac{E}{L} \qquad \text{d'où} \qquad B = \frac{E}{\omega_{\mathrm{p}}}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}\left[\cos(\omega_{\mathrm{p}}t) + \frac{R}{\omega_{\mathrm{p}}}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)\sin(\omega_{\mathrm{p}}t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t}\,.}$$

Tracé : Le tracé « direct » n'est pas possible, il faut donc utiliser les informations à disposition : conditions initiales, qui donne la valeur à $t = 0$ et le signe de la pente de la tangente, régime pseudo-périodique avec environ $Q = 2$ oscillations, et solution particulière qui donne le régime permanent asymptotique. Un exemple de chronogramme acceptable est représenté figure 4.

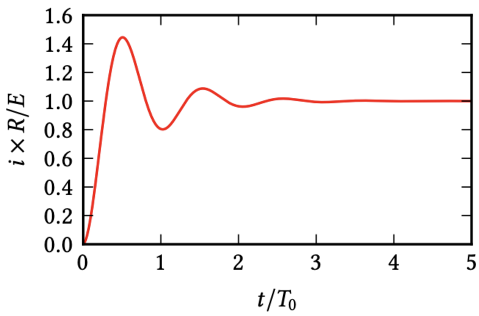


Figure 4 – Chronogramme du courant $i(t)$ dans le circuit RLC « mi-série, mi-parallèle ».