TEST M1 : Cinématique du point SUJET 1

Exercice 1 (10/15 min)

Dans un repère $R(O, \vec{u}_x ; \vec{u}_y)$, les équations horaires d'un point M sont :

$x(t) = 2t$ et $y(t) = -5t^2+10t$ *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Déterminer les coordonnées du point de départ M_0 à t=0 s.
2. Établir l'équation cartésienne de la trajectoire y(x). Quelle est sa nature ?
3. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et du vecteur accélération $\vec{a}(t)$.
4. Le sommet de la trajectoire correspond au point où la vitesse verticale v_y s'annule. À quelle date t_s le mobile atteint-il ce sommet ? Calculer la vitesse au sommet.
5. À quel instant le vecteur vitesse est-il perpendiculaire au vecteur accélération ?

Exercice 2 (15/20 min)

Un mobile M est animé d'un mouvement dont le vecteur position est défini par :

$x(t) = 4\cos(2t)$ $y(t) = 4\sin(2t)$ $z(t)=3t$ *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Montrer que la projection du mouvement dans le plan (O,x,y) est un cercle dont on précisera le rayon.
2. Quelle est la nature de la trajectoire globale dans l'espace (O,x,y,z) ?
3. Calculer la norme du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. Que peut-on dire de la vitesse ?
4. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ et montrer que sa norme est constante.

Exercice 3 : Coordonnées cylindriques(15/20 min)

Une abeille descend vers une fleur en suivant une trajectoire décrite en coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r \;, \vec{u}_\theta \;, \vec{u}_z)$ *par* :

- $r = r_0$ (constant)
- $\theta = \omega \cdot t$ (avec ω vitesse angulaire constante)
- $z = z_0 \cdot e^{-kt}$ (avec z_0 et k des constantes positives) *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Exprimer le vecteur position $\vec{OM}$ dans la base cylindrique.
2. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de l'abeille dans cette base.
3. Déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$.
4. Calculer la norme de la vitesse . Que devient cette vitesse quand t tend vers l'infini ?

Exercice 4 : Analyse de mouvement(10/15 min)

Le vecteur position d'un mobile est donné par :

$x = t-2$ et $y = t^2-4t+3$. *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Déterminer l'instant t_1 où le mobile passe par l'origine du repère (x = 0,y=0).
2. Établir l'expression de l'accélération. Le mouvement est-il uniforme ?
3. Entre t=0 et t=2 s, le mouvement est-il accéléré ou retardé ? Justifier en calculant le produit scalaire $\vec{v}.\vec{a}$.

Exercice5: Mouvement Circulaire Uniforme (MCU) (5/10 min)

Un point M parcourt un cercle de rayon **R = 50 cm** à une vitesse constante **v = 2 m/s**.

1. Calculer la valeur de l'accélération tangentielle a_t. Justifier.
2. Calculer la valeur de l'accélération normale a_n.
3. En déduire la norme du vecteur accélération totale a.
4. Calculer la période T du mouvement (le temps pour faire un tour complet).

Corrigé sujet 1 cinématique

Exercice 1 (10/15 min)

Dans un repère $R(O,\vec{u}_x;\vec{u}_y)$, les équations horaires d'un point M sont :

x(t) = 2t   et   y(t) = −5t^2+10t   *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Déterminer les coordonnées du point de départ M_0 à t=0 s.
2. Établir l'équation cartésienne de la trajectoire y(x). Quelle est sa nature ?
3. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et du vecteur accélération $\vec{a}(t)$.
4. Le sommet de la trajectoire correspond au point où la vitesse verticale v_y s'annule. À quelle date t_s le mobile atteint-il ce sommet ? Calculer la vitesse au sommet.
5. À quel instant le vecteur vitesse est-il perpendiculaire au vecteur accélération ?

Ex 1 : Parabole2,5 pts : 0,5 (M_0 et trajectoire) / 1 (Vecteurs) / 1 (Sommet et $\vec{v}\perp\vec{a}$)

Exercice 1 : Parabole

1. **Départ :** À $t = 0$, $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$. Le point est $M_0(0,0)$.
2. **Trajectoire :** $t = x/2$, donc $y = -5(x/2)^2 + 10(x/2) = \mathbf{-1,25x^2 + 5x}$. C'est une **parabole**. **parabole**.
3. **Vecteurs :** $v \begin{pmatrix} 2 \\ -10t+10 \end{pmatrix}$ et $a \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$.
4. **Sommet :** $v_y = 0 \implies -10t + 10 = 0 \implies \mathbf{t_s = 1s}$. Vitesse au sommet : $v(1) = \sqrt{2^2+0^2} = \mathbf{2\,m/s}$.
5. **Perpendicularité :** $v \cdot a = 0 \implies (-10t+10)\times(-10) = 0 \implies \mathbf{t = 1s}$ (au sommet).

Exercice 2 (15/20 min)

Un mobile M est animé d'un mouvement dont le vecteur position est défini par :

x(t) = 4cos(2t)   y(t) = 4sin(2t)   z(t)=3t   *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Montrer que la projection du mouvement dans le plan (O,x,y) est un cercle dont on précisera le rayon.
2. Quelle est la nature de la trajectoire globale dans l'espace (O,x,y,z) ?
3. Calculer la norme du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. Que peut-on dire de la vitesse ?
4. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ et montrer que sa norme est constante.

Ex 2 : Hélice2 pts 0,5 (cercle) / 0,5 (nature) / 1 (vitesse et accélération)

Exercice 2 : Hélice circulaire

1. **Projection :** $x^2 + y^2 = 4^2(\cos^2(2t) + \sin^2(2t)) = 16$. C'est un **cercle de rayon** $R = 4\,m$.
   $4\,m.$
2. **Nature :** Cercle en (x, y) + translation uniforme en z = **Hélice circulaire**.
3. **Vitesse :** $v \begin{pmatrix} -8\sin(2t) \\ 8\cos(2t) \\ 3 \end{pmatrix}$. Norme $v = \sqrt{(-8\sin)^2 + (8\cos)^2 + 3^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{\mathbf{73}} \approx \mathbf{8,54\,m/s}$.
   Vitesse constante.
4. **Accélération :** $a \begin{pmatrix} -16\cos(2t) \\ -16\sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix}$. Norme $a = \sqrt{(-16)^2} = \mathbf{16\,m/s^2}$ (Constante).

Exercice 3 : Coordonnées cylindriques(15/20 min)

Une abeille descend vers une fleur en suivant une trajectoire décrite en coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r\ ,\vec{u}_\theta\ ,\vec{u}_z)$ *par :*

- $r = r_0$ (constant)
- $\theta = \omega \cdot t$ (avec ω vitesse angulaire constante)
- $z = z_0 \cdot e^{-kt}$ (avec z_0 et k des constantes positives) *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Exprimer le vecteur position $\vec{OM}$ dans la base cylindrique.
2. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de l'abeille dans cette base.
3. Déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$.
4. Calculer la norme de la vitesse . Que devient cette vitesse quand t tend vers l'infini ?

Ex 3 : Abeille2,5 pts 0,5 (position) / 0,5 (vitesse) / 1 (accélération) / 0,5 (limite)

Exercice 3 : L'abeille (Cylindrique)

1. **Position :** $\overrightarrow{OM} = r_0\vec{u}_r + z_0 e^{-kt}\,\vec{u}_z$
2. **Vitesse :** $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z$Ici $\dot{r} = 0$ et $\dot{\theta} = \omega$. $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{r_0\omega u_\theta} - \mathbf{kz_0e^{-kt}}\,\vec{u}_z$
3. **Accélération :** $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z$ $\vec{\mathbf{a}} = -\mathbf{r_0}\omega^2\vec{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + \mathbf{k^2z_0e^{-kt}}\,\vec{u}_z$
4. **Limite :** $v = \sqrt{(r_0\omega)^2 + (-kz_0e^{-kt})^2}$. Quand $t \to \infty$, $e^{-kt} \to 0$. La vitesse tend vers $r_0\omega$ (mouvement circulaire pur).

Exercice 4 : Analyse de mouvement(10/15 min)

Le vecteur position d'un mobile est donné par :

$x = t-2$ et $y = t^2-4t+3$. *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Déterminer l'instant t_1 où le mobile passe par l'origine du repère (x = 0,y=0).
2. Établir l'expression de l'accélération. Le mouvement est-il uniforme ?
3. Entre t=0 et t=2 s, le mouvement est-il accéléré ou retardé ? Justifier en calculant le produit scalaire $\vec{v}\,.\vec{a}$.

Ex 4 : Analyse1,5 pts 0,5 (t1) / 0,5 (accélération) / 0,5 (Accéléré/Retardé)

Exercice 4 : Analyse

1. **Origine :** $x = 0 \implies t = 2s$. À $t = 2$, $y = 2^2 - 4(2) + 3 = -1$. Le mobile ne passe **jamais** par l'origine $(0, 0)$.
2. **Accélération :** $v \begin{pmatrix} 1 \\ 2t - 4 \end{pmatrix}$, $a \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Non uniforme car $a \neq 0$.
3. **Produit scalaire :** $v \cdot a = 2(2t - 4) = 4t - 8$. Entre $t = 0$ et $t = 2$, $4t - 8 < 0 \implies$ **Mouvement retardé**.

Exercice5: Mouvement Circulaire Uniforme (MCU) (5/10 min)

Un point M parcourt un cercle de rayon **R = 50 cm** à une vitesse constante **v = 2 m/s**.

1. Calculer la valeur de l'accélération tangentielle a_t. Justifier.
2. Calculer la valeur de l'accélération normale a_n.
3. En déduire la norme du vecteur accélération totale a.
4. Calculer la période T du mouvement (le temps pour faire un tour complet).

Ex 5 : MCU 1,5 pts 0,25 (at) / 0,75 (an et a) / 0,5 (Période)

Exercice 5 : Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)

Données : $R = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$; $v = 2 \text{ m/s}$ *(constante)*.

1. **Accélération tangentielle a_t :** Le mouvement est uniforme ($v = \text{cte}$), donc sa dérivée est nulle.

$$\mathbf{a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ m/s}^2}$$

2. **Accélération normale a_n :**

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2^2}{0,5} = \frac{4}{0,5} = \mathbf{8} \text{ m/s}^{\mathbf{2}}$$

3. **Norme de l'accélération totale a :**

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0^2 + 8^2} = \mathbf{8} \text{ m/s}^{\mathbf{2}}$$

4. **Période T :** C'est le temps pour parcourir le périmètre ($2\pi R$) à la vitesse v.

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2 \times \pi \times 0,5}{2} = \frac{\pi}{2} \approx \mathbf{1,57} \text{ s}$$