Sujet 2 cinématique corrigé

Exercice n°1 (10/15 min) et 3

Les équations paramétriques (en unités S.I.) d'un mobile M se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont :

$x = 3t$ et $y = - t^2 + 2t$ *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Établir l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile, quelle est la nature de la trajectoire ?
2. Le sommet de la trajectoire correspond au point où la vitesse verticale v_y s'annule.

À quelle date t_s le mobile atteint-il ce sommet ? Calculer la vitesse au sommet.

3. Calculer la vitesse du mobile au point d'ordonnée y = 1 m.
4. Calculer l'accélération du mobile. Pour quelle(s) valeur(s) de t, le mouvement est-il accéléré ? Retardé ?

Exercice n°2 (15/20 min)

Dans un repère R $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ orthonormé, on considère un mobile M en mouvement tel que :

$$\vec{OM} = 3\cos(2t)\vec{u}_x + 3\sin(2t)\vec{u}_y + (8t-4)\vec{u}_z. \quad \textit{(unités SI : mètres et secondes)}$$

1. Déterminer la nature de la trajectoire de M dans l'espace (O, x, y, z).
2. Exprimer $\vec{v}$ la vitesse et l'accélération $\vec{a}$ en coordonnées cartésiennes .

Exercice n°3 (15/20 min)

Une petite souris assimilée à un point M , descend un toboggan en forme d'hélice.

Cette hélice est définie en coordonnées cylindriques par:

r = R et z = - h θ *(unités SI : mètres et secondes)*

Les grandeurs R et h sont constantes; $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ représente la vitesse angulaire.

En coordonnées cylindriques, déterminer :

1. l'expression du vecteur position $\vec{OM}$,
2. l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$,
3. l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$.

Exercice n°4 (10/15 min)

voir exercice 1

Exercice n°5 (5/10 min)

Dans un laboratoire, on utilise une centrifugeuse pour séparer des composants. Un échantillon placé dans la machine décrit un mouvement circulaire **uniforme** à une distance **R = 20 cm** du centre de rotation. Sa vitesse est constante et vaut **v = 10 m/s**.

1. Donner la valeur de l'accélération tangentielle a_t en justifiant la réponse.
2. Calculer la valeur de l'accélération normale a_n subie par l'échantillon.
3. En déduire la norme de l'accélération totale a.
4. Si on double la vitesse (v = 20 m/s) sans changer le rayon, par combien l'accélération normale est-elle multipliée ?

Exercice n°1 (10/15 min)1

Les équations paramétriques (en unités S.I.) d'un mobile M se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont :

$x = 3t$ et $y = - t^2 + 2t$ *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Établir l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile, quelle est la nature de la trajectoire ?
2. Le sommet de la trajectoire correspond au point où la vitesse verticale v_y s'annule.

À quelle date t_s le mobile atteint-il ce sommet ? Calculer la vitesse au sommet.

3. Calculer la vitesse du mobile au point d'ordonnée y = 1 m.
4. Calculer l'accélération du mobile. Pour quelle(s) valeur(s) de t, le mouvement est-il accéléré ? Retardé ?

Exercice n°1 (10/15 min) et 3

Les équations paramétriques (en unités S.I.) d'un mobile M se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont :

x = 3t et y = - t² +2t *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Établir l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile, quelle est la nature de la trajectoire ?
2. Le sommet de la trajectoire correspond au point où la vitesse verticale v_y s'annule.

À quelle date t_s le mobile atteint-il ce sommet ? Calculer la vitesse au sommet.

3. Calculer la vitesse du mobile au point d'ordonnée y = 1 m.
4. Calculer l'accélération du mobile. Pour quelle(s) valeur(s) de t, le mouvement est-il accéléré ? Retardé ?

Exercice 1. 4 points : 1 (trajectoire)/1 (sommet)/1 (point y)/1(accéléré, retardé)

Exercice 1 (Plan)

1. **Trajectoire :** $t = x/3 \implies y = -(x/3)^2 + 2(x/3) = -\frac{1}{9}\mathbf{x^2} + \frac{2}{3}\mathbf{x}$ (Parabole).
2. **Sommet :** $v_y = -2t + 2 = 0 \implies \mathbf{t_s = 1s}$. Vitesse : $v_x = 3, v_y = 0 \implies \mathbf{v = 3\,m/s}$.
3. **Point y = 1m :** $-t^2 + 2t = 1 \implies t^2 - 2t + 1 = 0 \implies (t-1)^2 = 0 \implies \mathbf{t = 1s}$.
   Vitesse déjà calculée : $3\,m/s$.
4. **Accélération :** $a \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. $v \cdot a = -2(-2t+2) = 4t - 4$.
   - Si $t > 1s : v \cdot a > 0$ (**accéléré**).
   - Si $t < 1s : v \cdot a < 0$ (**retardé**).

Exercice n°2(15/20 min)

Dans un repère R $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ orthonormé, on considère un mobile M en mouvement tel que :

$$\vec{OM} = 3\cos(2t)\vec{u}_x + 3\sin(2t)\vec{u}_y + (8t-4)\vec{u}_z.$$ *(unités SI : mètres et secondes)*

1. Déterminer la nature de la trajectoire de M dans l'espace (O, x, y, z).

2. Exprimer $\vec{v}$ la vitesse et l'accélération $\vec{a}$ en coordonnées cartésiennes .

Ex 2 : Espace **2 pts** 1 (Nature) / 1 (Vitesse et Accélération)

Exercice 2 : Mouvement dans l'espace

Données : $x(t) = R\cos(\omega t)$ *;* $y(t) = R\sin(\omega t)$ *;* $z(t) = v_0 t$ *(structure classique).*

1. **Nature de la trajectoire :**
   - Dans le plan (O, x, y) : $x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 + \sin^2) = R^2$. La projection est un **cercle** de centre O et de rayon R.
   - Sur l'axe z : le mouvement est rectiligne uniforme (z augmente proportionnellement au temps).
   - **Conclusion :** La combinaison d'un cercle et d'une translation perpendiculaire donne une **hélice circulaire**.
2. **Vitesse et Accélération :**
   - $v \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \\ v_0 \end{pmatrix} \implies v = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}$ (vitesse constante).
   - $a \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \implies a = \sqrt{(-R\omega^2)^2} = \mathbf{R\omega^2}$ (accélération constante dirigée vers l'axe z).

$\vec{OM} = 3\cos(2t)\vec{u}_x + 3\sin(2t)\vec{u}_y + (8t-4)\vec{u}_z$.   R = 3 m ; ω = 2 rad/s ; v_O = 8 m/s.

Exercice n°3 (15/20 min)

Une petite souris assimilée à un point M , descend un toboggan en forme d'hélice.
Cette hélice est définie en coordonnées cylindriques par:

r = R et z = - h θ *(unités SI : mètres et secondes)*

Les grandeurs R et h sont constantes; $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ représente la vitesse angulaire.

En coordonnées cylindriques, déterminer :

1. l'expression du vecteur position $\vec{OM}$,
2. l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$,
3. l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$.

Ex3. 2,5 pts : 0,5 (position)/ 1(vitesse)/1 (accélération)

$\vec{OM} = R\vec{u}_r - h\theta\vec{u}_z$
$\vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta - h\omega\vec{u}_z$
$\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r$

Exercice n°5(5/10 min)

Dans un laboratoire, on utilise une centrifugeuse pour séparer des composants. Un échantillon placé dans la machine décrit un mouvement circulaire **uniforme** à une distance **R = 20 cm** du centre de rotation. Sa vitesse est constante et vaut **v = 10 m/s**.

5. Donner la valeur de l'accélération tangentielle a_t en justifiant la réponse.
6. Calculer la valeur de l'accélération normale a_n subie par l'échantillon.
7. En déduire la norme de l'accélération totale a.
8. Si on double la vitesse (v = 20 m/s) sans changer le rayon, par combien l'accélération normale est-elle multipliée ?

Ex 5 : Centrif. **1,5 pts** 0,5 (at) / 0,5 (an) / 0,5 (Facteur 4)

Exercice 5 Centrifugeuse

1. a_t **:** Vitesse constante $\Longrightarrow$ $dv/dt = 0$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{a_t} = \mathbf{0}$.
2. a_n **:** $a_n = v^2/R = 10^2/0,2 = \mathbf{500\,m/s^2}$.
3. **Norme :** $a = \sqrt{0^2 + 500^2} = \mathbf{500\,m/s^2}$.
4. **Doublement :** a_n est proportionnelle à v^2. Si v x2, alors v^2 x4. L'accélération est **multipliée par 4**.