

SUJET 1

Exercice 1 : Mouvement d'une sonde météo

Une petite sonde est emportée par un tourbillon ascendant. Sa trajectoire est modélisée en coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ par :

- $r(t) = a t$ (où a est une constante positive, la sonde s'éloigne du centre)
- $\theta(t) = \theta_0$ (constant, le mouvement est radial dans un plan vertical)
- $z(t) = H \sin(\omega t)$ (oscillation verticale, avec H et ω constantes)

1. **Vecteur position** : Exprimer le vecteur position $\vec{OM}$ dans la base cylindrique.
2. **Vecteur vitesse** : Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de la sonde dans cette base.
3. **Vecteur accélération** : Déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ de la sonde.
4. **Analyse** : Calculer la norme de la vitesse $v(t)$. Que vaut cette vitesse à l'instant $t=0$?

Exercice 2 : Centrifugeuse de laboratoire (20 min)

Une éprouvette est placée dans une centrifugeuse. Elle décrit un cercle de rayon $R=20$ cm. Le mouvement est d'abord accéléré, puis stabilisé à une vitesse constante $v=10$ m/s.

1. **Accélération tangentielle** : déterminer la valeur de a_t . Justifier brièvement.
2. **Accélération normale** : déterminer la valeur de a_n .
3. **Période** : calculer le temps T nécessaire pour effectuer un tour complet.
4. **Fréquence** : En déduire le nombre de tours par seconde (fréquence $f=1/T$).
5. Si la vitesse v doublait soudainement, par quel facteur l'accélération normale a_n serait-elle multipliée ? Justifiez par la formule.

Corrigé SUJET 1

1. Vecteur position $\overrightarrow{OM}$: Dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, le vecteur position s'écrit toujours $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$. En remplaçant par les données de l'énoncé :

$$\overrightarrow{OM} = at\vec{u}_r + H \sin(\omega t)\vec{u}_z$$

2. Vecteur vitesse $\vec{v}$: On dérive chaque composante par rapport au temps.

- **Composante radiale :** $v_r = \dot{r} = a$.
- **Composante orthoradiale :** $v_\theta = r\dot{\theta}$. Comme $\theta = \theta_0$ (constant), $\dot{\theta} = 0$, donc $v_\theta = 0$.
- **Composante verticale :** $v_z = \dot{z} = \frac{d}{dt}(H \sin(\omega t)) = H\omega \cos(\omega t)$. D'où :

$$\vec{v} = a\vec{u}_r + H\omega \cos(\omega t)\vec{u}_z$$

3. Vecteur accélération $\vec{a}$: On dérive à nouveau le vecteur vitesse. Comme $\dot{\theta} = 0$, les vecteurs de base $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ sont ici fixes dans le temps.

- $a_r = \dot{v}_r = \frac{d}{dt}(a) = 0$.
- $a_\theta = 0$ (car v_θ reste nul).
- $a_z = \dot{v}_z = \frac{d}{dt}(H\omega \cos(\omega t)) = -H\omega^2 \sin(\omega t)$. D'où :

$$\vec{a} = -H\omega^2 \sin(\omega t)\vec{u}_z$$

4. Analyse (Norme et $t = 0$) : La norme est $v(t) = \sqrt{v_r^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2 + (H\omega \cos(\omega t))^2}$. À l'instant $t = 0$: $\cos(0) = 1$, donc $v(0) = \sqrt{a^2 + (H\omega)^2}$.

Exercice 2 : Centrifugeuse de laboratoire

Données : $R = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$; $v = 10 \text{ m/s}$.

1. **Accélération tangentielle a_t :** Le mouvement est stabilisé à une vitesse constante ($v = 10 \text{ m/s}$). $a_t = \frac{dv}{dt}$. La dérivée d'une constante étant nulle, $a_t = 0 \text{ m/s}^2$.
2. **Accélération normale a_n :**

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{0,2} = \frac{100}{0,2} = 500 \text{ m/s}^2$$

3. **Période T :** La période est la distance d'un tour ($2\pi R$) divisée par la vitesse :

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \times 0,2}{10} = \frac{0,4\pi}{10} = 0,04\pi \approx \mathbf{0,126 \text{ s}}$$

4. **Fréquence f :**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,04\pi} \approx \mathbf{7,96 \text{ tours/seconde (Hz)}}$$

Suite exercice 1

5. **Facteur multiplicateur de a_n** : D'après la formule $a_n = \frac{v^2}{R}$, l'accélération normale est proportionnelle au **carré** de la vitesse. Si la vitesse est multipliée par 2 ($v' = 2v$), alors :

$$a'_n = \frac{(2v)^2}{R} = \frac{4v^2}{R} = 4a_n$$

L'accélération normale est donc **multipliée par 4**.

SUJET 2

Exercice 1 : Mouvement d'un drone en phase de décollage

Un drone s'élève en spirale. Sa trajectoire est décrite dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ par :

- $r = R_0$ (constant)
- $\theta = \alpha t^2$ (où α est une constante positive, le mouvement s'accélère angulairement)
- $z = v_0 t$ (vitesse ascensionnelle constante, avec $v_0 > 0$)

1. **Vecteur position** : Exprimer le vecteur position OM dans la base cylindrique.

2. **Vecteur vitesse** : Déterminer l'expression du vecteur vitesse v du drone.

3. **Vecteur accélération** : Déterminer l'expression du vecteur accélération a .

• *Aide : Attention, ici θ' n'est pas constant, il dépend de t .*

4. **Norme** : Calculer la norme de la vitesse $v(t)$ en fonction du temps.

5. **Analyse** : Quelle est la valeur de la vitesse au moment du décollage ($t=0$) ?

Exercice 2 : Rotation d'un disque de stockage

Un point P situé sur le bord d'un disque dur de rayon $R=5$ cm tourne à une vitesse constante. On mesure qu'il effectue un tour complet en $T=0,02$ secondes.

1. **Vitesse linéaire** : Calculer la vitesse v du point P en m/s.

2. **Accélération normale** : Calculer la valeur de l'accélération normale a_n .

3. **Accélération tangentielle** : Que vaut l'accélération tangentielle a_t ? Justifier par une phrase.

4. **Accélération totale** : En déduire la norme de l'accélération totale a .

5. **Comparaison** : Si le point P se trouvait à mi-distance du centre (rayon $R/2$), est-ce que son accélération normale serait plus grande ou plus petite ? Justifier.

Corrigé SUJET 2

Exercice 1

1. Vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = R_0 \vec{u}_r + v_0 t \vec{u}_z$$

2. Vecteur vitesse v : Ici $\dot{\theta} = \frac{d(\alpha t^2)}{dt} = 2\alpha t$.

- $\dot{r} = 0$.
- $r\dot{\theta} = R_0(2\alpha t)$.
- $\dot{z} = v_0$.

$$\vec{v} = 2R_0\alpha t \vec{u}_\theta + v_0 \vec{u}_z$$

3. Vecteur accélération a :

- Terme radial ($a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$) : $0 - R_0(2\alpha t)^2 = -4R_0\alpha^2 t^2$.
- Terme orthoradial ($a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$) : $R_0(2\alpha) + 0 = 2R_0\alpha$.
- Terme vertical ($\ddot{z}$) : 0 .

$$\vec{a} = -4R_0\alpha^2 t^2 \vec{u}_r + 2R_0\alpha \vec{u}_\theta$$

4. Norme de la vitesse et valeur à $t = 0$: $v(t) = \sqrt{(2R_0\alpha t)^2 + v_0^2}$. À $t = 0$, $v(0) = v_0$.

Exercice 2

Données : $R = 0,05 \text{ m}$, $T = 0,02 \text{ s}$.

1. **Vitesse v** : $v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \times \pi \times 0,05}{0,02} = \frac{0,1\pi}{0,02} = 5\pi \approx 15,7 \text{ m/s}$.
2. **Accélération normale a_n** : $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(5\pi)^2}{0,05} = \frac{25\pi^2}{0,05} = 500\pi^2 \approx 4935 \text{ m/s}^2$.
3. **Accélération tangentielle a_t** : 0 m/s^2 (vitesse constante).
4. **Accélération totale a** : $a = a_n \approx 4935 \text{ m/s}^2$.
5. **Comparaison** : Si le rayon est divisé par 2 ($R/2$) à vitesse angulaire égale, v est aussi divisée par 2. Or $a_n = \frac{v^2}{R}$. En remplaçant, l'accélération normale serait **plus petite** (elle est proportionnelle au rayon pour une vitesse de rotation donnée).