

Le pendule simple

Le Problème du Pendule et sa mise en équation

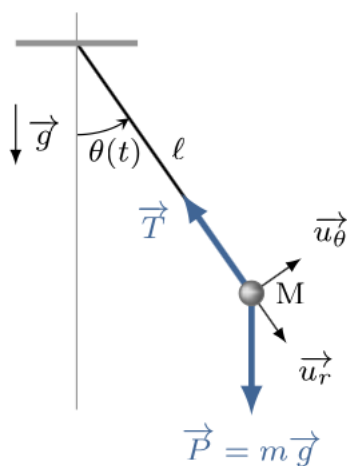
Le pendule simple est l'un des premiers systèmes dynamiques que l'on étudie. Pourtant, sa résolution mathématique exacte est impossible avec des fonctions classiques (sinus, cosinus) dès que l'on sort du cadre des "petites oscillations".

Il s'agit de l'établissement de l'équation différentielle de trois façons différentes.

Dans les trois cas, on étudie une **masse m ponctuelle**, attachée à un **fil de longueur l**, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. **On suppose qu'il n'y a pas de frottements.**

On repère sa position par l'angle θ .

Méthode 1. La Seconde Loi de Newton (PFD)



Système : masse m ponctuelle.

Référentiel terrestre supposé galiléen.

Repère polaire $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

$$\vec{OM} = l \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{a} = \dots\dots\dots$$

- **Bilan des forces :** le poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$.

$$\vec{P}$$

$$\vec{T}$$

- **Accélération :** $\vec{a} = l \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - l \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$.

- **Application de la seconde loi de Newton et projection sur l'axe orthoradial ($\vec{u}_\theta$) :**
 $m l \ddot{\theta} = - m g \sin(\theta)$

- En simplifiant par m et en mettant sous forme canonique, on retrouve : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$.

Méthode 2. Le Théorème du Moment Cinétique (TMC)

Le système est en rotation autour d'un axe fixe (Oz).

$$\vec{OM} = l \vec{u}_r \quad \vec{v} = l \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{P} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$$

• **Moment cinétique en O :** $L_{O,z} = (\vec{OM} \wedge m \vec{v}) \cdot \vec{u}_z = ml^2 \dot{\theta}$.

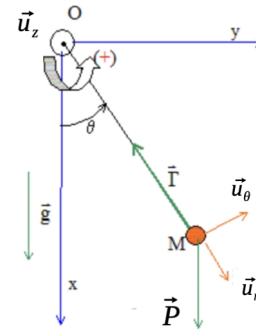
• **Moment des forces en O :**

• $M_{O,z}(\vec{T}) = 0$ (car la force passe par l'axe).

• $M_{O,z}(\vec{P}) = (\vec{OM} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z = -mgl \sin(\theta)$ (remarque : le bras de levier est $l \sin \theta$).

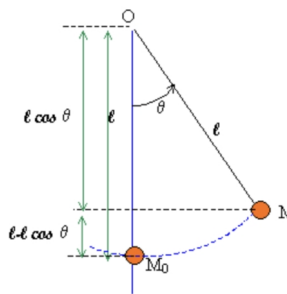
• **Application du TMC :** $\frac{dL_{O,z}}{dt} = \sum M_{O,z}(\vec{P})$

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) \quad \text{On retrouve la même équation après simplification.}$$



Méthode 3 L'Approche Énergétique (Conservation de l'énergie)

Très utile car elle manipule des scalaires (nombres) plutôt que des vecteurs.



• **Énergie Cinétique :** $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2$

• **Énergie Potentielle :** $E_p = mgl(1 - \cos \theta)$ (en prenant l'origine au point le plus bas).

• **Énergie Mécanique :** $E_m = E_c + E_p = \text{constante}$. (pas de frottement)

• **Dérivation par rapport au temps :** $\frac{dE_m}{dt} = 0$.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos \theta) \right] = 0$$

$$m(l^2 \dot{\theta}) \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin(\theta) = 0$$

En divisant par le terme commun $ml \dot{\theta}$ si $\dot{\theta} \neq 0$, on retombe sur : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$.

Synthèse des méthodes

Méthode	Avantage	Difficulté
2nde loi de Newton (PFD)	Très visuel, montre toutes les forces.	Projections des vecteurs.
Théorème du moment cinétique	Évite de s'occuper de la tension du fil.	Demande de bien maîtriser le produit vectoriel.
Conservation de l'énergie mécanique	Pas de vecteurs, calculs plus rapides.	Ne donne pas directement l'accélération (il faut dériver).

Le but du programme Python est donc de résoudre cette équation unique, que l'on parte de Newton, de l'énergie ou du moment cinétique.

La résolution :

• **Cas linéaire ($\theta < 20^\circ$)** : on approxime $\sin(\theta) \approx \theta$. L'équation devient $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$. La solution est une sinusoïde parfaite de période propre $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

On observe dans ce cas l'**isochronisme** : la période T ne dépend pas de l'amplitude.

• **Cas non-linéaire (θ élevé)** : on ne peut plus simplifier le $\sin(\theta)$. L'équation n'a pas de solution analytique simple. C'est là que l'**outil informatique** intervient.

Pour les grands angles, la période réelle est plus longue. On utilise alors, en première approximation*, la **formule de Borda** : $T \simeq T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16}\right)$ pour corriger. (* Cette formule produit une erreur supérieure à 1% dès que l'on dépasse 74°).

Et si l'on considère les frottements...

Méthode 1

$\vec{f} = -h\vec{v} = -hl\dot{\theta}\vec{u}_\theta$: force de frottement fluide, à rajouter aux forces extérieures.

Méthode 2

$M_{O,z}(\vec{f}) = (\vec{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_z = (l\vec{u}_r \wedge -hl\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z = -hl^2\dot{\theta}$, à rajouter aux moments des forces extérieures.

Méthode 3

Il n'y a plus conservation de l'énergie mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{F}_{nc}) = \vec{f} \cdot \vec{v}$.

$$P(\vec{f}) = -h\vec{v} \cdot \vec{v} = -hv^2 = -hl^2\dot{\theta}^2.$$

Dans les trois cas, on obtient : $ml\ddot{\theta} + hl\dot{\theta} + mgsin(\theta) = 0$ soit, sous forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$