

DEVOIR SURVEILLÉ 2026
de mécanique - durée : 3 heures

Problème 1

Données pour le problème 1 (Q1 à Q12)

masse du système {skateboardeur + skateboard} : $m = 75,0 \text{ kg}$;

intensité du champ de pesanteur : $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$;

coefficient de frottement cinétique : $\mu_c = 0,040$;

vitesse du skateboardeur au point B : $v_B = 3,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;

longueur de l'obstacle: $L = 1,0 \text{ m}$; position initiale du skateboardeur $G_0 (0 ; 80 \text{ cm})$;

distance de l'obstacle à l'origine du repère: $\ell = 0,70 \text{ m}$.

Depuis les Jeux Olympiques de Tokyo en 2020, le skateboard est un sport olympique. Une épreuve de « street » se déroulera à l'occasion des Jeux Olympiques de Paris de 2024.

Le street consiste en la réalisation de figures et d'enchaînements pendant une durée limitée sur un parcours reproduisant des éléments de rue, appelés modules, tels que des plans inclinés, des rails, des bancs...

On se propose dans cet exercice d'étudier quelques phases de mouvements simples réalisés par un skateboardeur lors de la pratique du street. Dans tout cet exercice, on appellera skateboardeur le système {skateboard + skateboardeur}. Ce système de masse m est indéformable et modélisé par un point matériel assimilé à son centre de masse G . Les études des différentes phases du mouvement sont effectuées dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. L'ensemble des phases étudiées est représenté ci-dessous sans souci d'échelle .

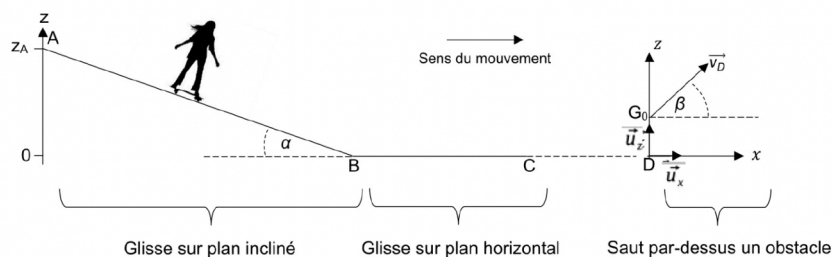
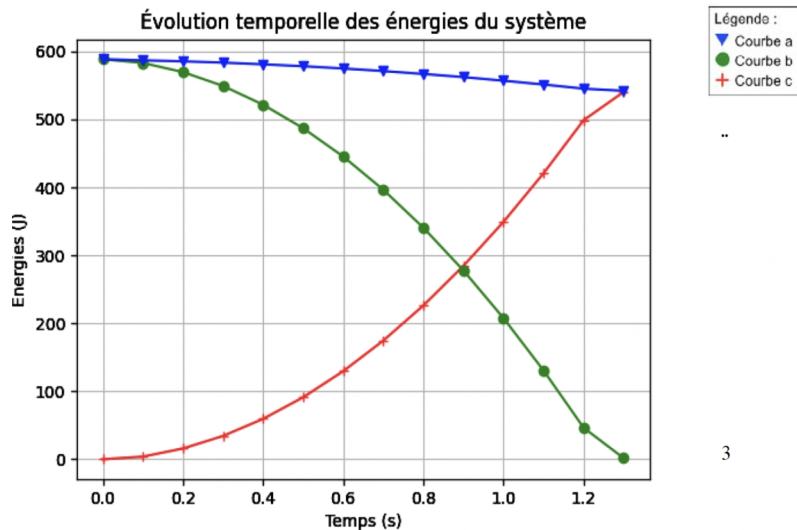


Figure 1. Les différentes phases du mouvement

A. Glisse sur plan incliné

Le skateboardeur est à l'arrêt au point A en haut d'un module de plan incliné de longueur AB faisant un angle α avec le plan l'horizontal. Le skateboardeur s'élance sans vitesse initiale le long de la pente pour rejoindre le point B. Durant cette phase, on considère que les frottements de l'air sont négligeables et que les frottements des roues sur la piste sont modélisés par une force notée \vec{F} .



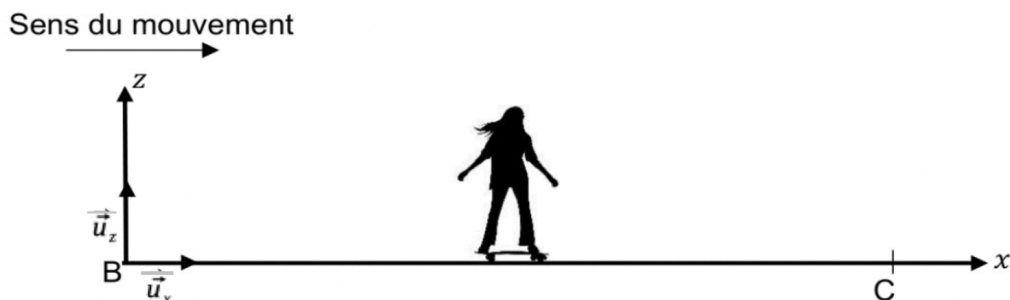
- Q1. Nommer les différentes énergies correspondants aux différentes courbes.
 Q2. Interpréter leurs évolutions temporelles.
 Q3. Déterminer la valeur de la vitesse atteinte par le skateboardeur au point B.

B. Phase de mouvement horizontal

Durant la phase de mouvement entre les points B et C, Le skateboardeur glisse jusqu'à s'arrêter au point C. Les forces de frottement liées à l'air sont toujours négligées. Le skateboardeur est notamment soumis à une force de frottement \vec{f} qui s'oppose au mouvement.

On définit μ_c le coefficient de frottement cinétique tel que : $\mu_c = \frac{f}{R}$

avec : f : norme de la force de frottement ; R : norme de la réaction normale au plan.



Q4. Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées au skateboardeur et les représenter sans souci d'échelle sur la copie.

Q5. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique appliqué entre les points B et C, établir la relation entre v_B , m , f et la distance d'arrêt BC.

Q6. Montrer que la distance d'arrêt BC s'exprime par la relation : $BC = \frac{v_B^2}{2\mu_c g}$

Q7. Calculer la valeur de la distance d'arrêt.

Les roues de skateboard sont réalisées en polyuréthane et sont caractérisées par leur dureté. Plus les roues sont « dures » plus les frottements sont faibles.

Un skateboardeur choisit de remplacer les roues habituelles de son skateboard par des roues moins dures de même géométrie.

Q8. Indiquer en justifiant comment évolue la distance d'arrêt du skateboard suite à ce changement de roues.

C. Étude d'un saut



Figure 2. Représentation de la situation sans souci d'échelle

Dans cette partie, on souhaite vérifier si le skateboardeur franchit l'obstacle.

Q9. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir les équations horaires décrivant la trajectoire du centre de masse G du skateboardeur lors du saut.

Q10. Montrer que l'équation de la trajectoire du centre de masse G s'écrit sous la forme :

$$z(x) = \frac{-g}{2v_D^2 \cos^2(\beta)} \cdot x^2 + \tan(\beta) \cdot x + z_0$$

L'équation de la trajectoire est modélisée par l'équation suivante, x et z étant exprimées en m :

$$z(x) = -0,894 x^2 + 1,22 x + 0,80$$

Q11. Calculer la valeur de la coordonnée x du centre de masse lorsque le skateboardeur retrouve l'altitude initiale $z = z_0$.

Q12. En déduire si le skateboardeur franchira ou pas l'obstacle.

Problème 2

Première partie : Oscillations d'un pendule simple

Un objet ponctuel A de masse m est suspendu à l'extrémité P d'un fil OP de masse négligeable et de longueur L . Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz).

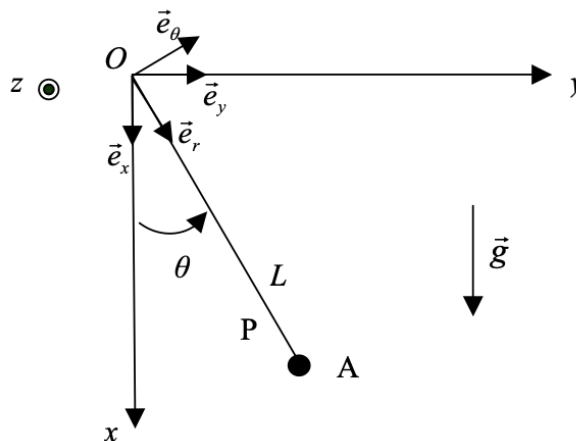
La position de l'objet A est repérée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation seront négligés dans toutes les questions.

Les frottements de l'air seront négligés dans toutes les questions hormis dans les question 2.5 et 3.5 où l'on envisagera un amortissement par frottement fluide.

L'ensemble ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur \vec{g} tel que $\vec{g} = g \cdot \vec{e}_x$.



1 – Etude dynamique : équation différentielle du mouvement

1.1/ Faire le bilan des forces appliquées à l'objet A .

En appliquant le théorème du moment cinétique en coordonnées cylindriques par rapport au point O , déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ .

1.2/ Déterminer à l'aide de l'équation précédente la ou les positions d'équilibre du système. Etudier, en justifiant les résultats, la stabilité de ces positions.

Aide: équation simplifiée:
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

2 – Petites oscillations

2.1/ A l'instant $t = 0$, l'objet A est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_0 . On se place dans le cas où l'angle θ_0 est petit. Montrer que le système constitue alors un oscillateur harmonique.

En déduire la pulsation ω_0 et la période T_0 des petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre stable. On exprimera ω_0 et T_0 en fonction de g et L .

2.2/ Compte tenu des conditions initiales, déterminer l'expression $\theta(t)$ de l'angle θ en fonction du temps pour $t \geq 0$.

2.3/ Quelle est la valeur maximale v_{\max} de la vitesse de l'objet A au cours de son mouvement ? On exprimera v_{\max} en fonction de θ_0 , L et g .

2.4/ Tracer la représentation graphique de θ en fonction du temps.

2.5/ Amortissement par frottement fluide

Nous nous plaçons dans le cas où l'objet A est soumis à un frottement fluide proportionnel à sa vitesse. Soit h le coefficient de proportionnalité entre la force de frottement \vec{f} et la vitesse \vec{v} de l'objet A . La force de frottement s'écrit donc sous la forme $\vec{f} = -h\vec{v}$.

Etablir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ .

Les frottements sont supposés suffisamment faibles pour que le régime d'oscillations de l'objet A soit pseudo-périodique.

Déterminer alors, **dans le cas des petites oscillations**, la solution $\theta(t)$ de l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ lorsque l'objet A est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_0 .

Donner, dans ce cas, l'allure de la représentation graphique de $\theta(t)$ en fonction du temps.

3 – Aspect énergétique

Nous nous proposons, dans cette question, de retrouver l'équation différentielle du mouvement du pendule par une méthode énergétique.

L'étude sera faite dans le cas général de mouvements d'amplitude quelconque.

3.1/ Déterminer, pour une position du pendule repérée par un angle θ quelconque, l'expression de l'énergie cinétique E_c de l'objet A (pour $t \geq 0$) en fonction de m , L et $\frac{d\theta}{dt}$.

3.2/ Déterminer de même, pour une position du pendule repérée par un angle θ quelconque, l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_p de l'objet A (pour $t \geq 0$) en fonction de m , L , θ et g accélération de la pesanteur. On prendra la référence de l'énergie potentielle de pesanteur dans la position repérée par l'angle $\theta = 90^\circ$.

3.3/ Sachant que dans cette question tous les frottements sont négligés, retrouver par des considérations énergétiques l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

3.4/ Dans le cas des mouvements de faible amplitude, l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie cinétique de l'objet A sont des fonctions périodiques du temps. Déterminer la période T'_0 de ces fonctions en fonction de T_0 (période définie dans la question 2.1). Justifier le résultat.

3.5/ Amortissement par frottement fluide

Nous nous plaçons à nouveau dans le cas où l'objet A est soumis à un frottement fluide proportionnel à sa vitesse. Soit h le coefficient de proportionnalité entre la force de frottement \vec{f} et la vitesse \vec{v} de l'objet A . La force de frottement s'écrit sous la forme $\vec{f} = -h\vec{v}$.

Compte tenu des expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur de l'objet A déterminées précédemment, retrouver par des considérations énergétiques l'équation différentielle du mouvement de la question 2.5 dans le cas où l'on prend en compte la présence d'un frottement fluide.

Deuxième partie : Rotation d'un pendule composé autour d'un axe fixe

On considère un pendule composé constitué :

- d'un disque homogène A , de masse m , de rayon R , de centre P ;
- d'une tige OP homogène de masse m' , de longueur L , de milieu C .

Le disque et la tige sont rigidement liés l'un à l'autre et contenus dans le plan (Oxy) .

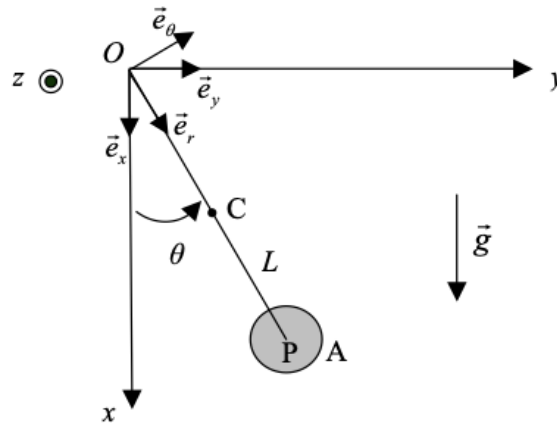
L'ensemble constitué par le disque A et la tige OP peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy) , autour de l'axe horizontal (Oz) .

La position du pendule précédent est repérée par l'angle θ que fait la tige avec la verticale.

On négligera tout frottement.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

L'ensemble ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur \vec{g} tel que $\vec{g} = g \cdot \vec{e}_x$.



Le moment d'inertie I_0 de la tige par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par le point C est égal à $I_0 = m' \frac{L^2}{12}$.

Le moment d'inertie I_1 de la tige par rapport à l'axe horizontal (Oz) est égal à $I_1 = I_0 + m' \left(\frac{L}{2} \right)^2 = m' \frac{L^2}{3}$

Le moment d'inertie J_0 du disque A par rapport à un axe perpendiculaire au disque et passant par son centre P est égal à $J_0 = m \frac{R^2}{2}$.

Le moment d'inertie J_1 du disque par rapport à l'axe horizontal (Oz) est égal à $J_1 = J_0 + mL^2 = m \frac{R^2}{2} + mL^2$

4 – Moment d'inertie du pendule composé

Déterminer l'expression du moment d'inertie J du système { disque A + tige OP } par rapport à l'axe horizontal (Oz). On exprimera J en fonction de m, m', R et L .

Réponse : Le moment d'inertie total du pendule par rapport à l'axe (Oz) est simplement la somme des deux :

$$J = I_1 + J_1$$

$$J = \frac{m'L^2}{3} + m \left(\frac{R^2}{2} + L^2 \right)$$

5 – Etude dynamique : équation différentielle du mouvement

5.1/ Faire le bilan des forces appliquées au système { disque A + tige OP }.

5.2/ En appliquant le théorème du moment cinétique au système { disque A + tige OP }, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

5.3/ A l'instant $t = 0$, le système { disque A + tige OP } est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_1 . On se place dans le cas où l'angle θ_1 est petit. Montrer que le système constitue alors un oscillateur harmonique.

En déduire la pulsation ω_1 et la période T_1 des petites oscillations du système { disque A + tige OP } autour de sa position d'équilibre stable ($\theta = 0$). On exprimera ω_1 et T_1 en fonction de J, L, m, m' et g .

6 – Simplification : retour au cas du pendule simple

On considère les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la masse m' de la tige OP est négligeable devant la masse m du disque,
- le disque A est de très petite taille de telle sorte que l'on peut le considérer comme ponctuel.

En détaillant clairement les simplifications induites par les hypothèses précédentes, indiquer ce que devient l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

Comparer le cas présent au cas du pendule simple de la première partie.