PROBLÈME 2

1 – Etude dynamique : équation différentielle du mouvement

1.1/ Bilan des forces et équation différentielle

L'objet A (masse m) est soumis à deux forces :

1. **Le poids** : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg\overrightarrow{ex}$.
2. **La tension du fil** : T, dirigée vers le point O ($\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{er}$).

Théorème du moment cinétique au point O :

$$\frac{d\overrightarrow{LO}}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}O}(\overrightarrow{F})$$

- **Moment cinétique :** $\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{OA} \wedge m\overrightarrow{vA}$. Avec $\overrightarrow{OA} = L\overrightarrow{er}$ et $\overrightarrow{vA} = L\dot{\theta}\overrightarrow{e\theta}$, on a :

$$\overrightarrow{LO} = mL^2\dot{\theta}\overrightarrow{ez}$$

- **Moment des forces :**
  - $\overrightarrow{\mathcal{M}O}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{0}$ (la force passe par l'axe).
  - $\overrightarrow{\mathcal{M}O}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OA} \wedge m\overrightarrow{g} = L\overrightarrow{er} \wedge mg(\cos\theta\overrightarrow{er} - \sin\theta\overrightarrow{e\theta}) = -mgL\sin\theta\overrightarrow{ez}$.

En dérivant le moment cinétique et en égalisant :
$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta$, ce qui nous donne l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

1.2/ Positions d'équilibre et stabilité

À l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$, donc $\sin\theta = 0$.

- $\theta e = 0$ **(bas) :** Si on écarte légèrement le pendule, le moment du poids le ramène vers 0. C'est un **équilibre stable**.
- $\theta e = \pi$ **(haut) :** Le moindre écart accentue le mouvement. C'est un **équilibre instable**.

Ici , on annule la dérivée seconde mais si on avait l’expression de l’énergie potentielle de pesanteur, il faudrait trouver les valeurs de l’angle telles que la dérivée de l’énergie potentielle de pesanteur soit nulle.

2 – Petites oscillations

2.1/ Oscillateur harmonique

Pour de petits angles, on utilise le développement limité $\sin\theta \approx \theta$. L'équation devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

C'est l'équation d'un **oscillateur harmonique** de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

- **Pulsation propre :** ω_0
- **Période propre :** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

2.2/ Expression de $\theta(t)$

La solution générale est $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.
Avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\omega_0 t\right)$$

2.3/ Vitesse maximale v_{max}

La vitesse est $v(t) = L\dot{\theta}(t) = -L\omega_0\theta_0\sin(\omega_0 t)$.
La valeur maximale est $v_{max} = L\omega_0\theta_0$. En remplaçant ω_0 :

$$v_{max} = \theta_0\sqrt{gL}$$

2.5/ Amortissement par frottement fluide

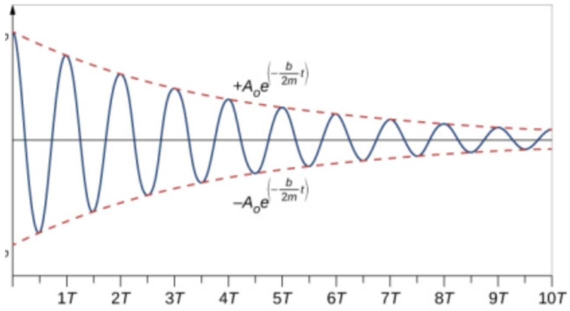
Equation différentielle :
On ajoute la force $\vec{f} = -h\vec{v} = -hL\dot{\theta}\vec{e_\theta}$. Son moment est $\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{f}) = -hL^2\dot{\theta}\vec{e_z}$.
L'équation devient : $mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta - hL^2\dot{\theta}$.
En simplifiant par mL^2 :

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Solution de la forme :

$$\theta(t)=\exp\left(\frac{-h}{2m}t\right)\left(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right)$$

A et B se déterminent grace aux conditions initiales .



H

θ(t) ωω

(Où ω est la pseudo-pulsation, légèrement inférieure à ω_0).

L'allure est une **sinusoïde amortie** dont l'amplitude décroît exponentiellement vers zéro.

---

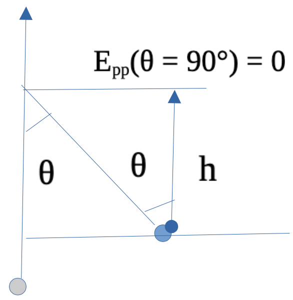
3 – Aspect énergétique

3.1/ Énergie cinétique

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2$$

3.2/ Énergie potentielle de pesanteur

L'altitude de A est $x = L\cos\theta$. La force de pesanteur étant selon $+ex$,



Avec la référence $Ep = 0$ pour $\theta = 90^\circ$ $(\cos 90^\circ = 0)$, on a

$$Ep(\theta) = -mgL\cos\theta$$

3.3/ Retrouver l'équation différentielle (sans frottements)

L'énergie mécanique $Em = Ec + Ep$ est conservée : $\frac{dEm}{dt} = 0$.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta\right] = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

En simplifiant par $mL^2\dot{\theta}$ (pour $\dot{\theta} \neq 0$), on retrouve : $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$.

4 – Moment d'inertie du pendule composé

Le système est constitué de la tige OP et du disque A. Le moment d'inertie total J par rapport à l'axe (Oz) est la somme des moments d'inertie de chaque composant par rapport à cet axe :

$$J = I1 + J1$$

En reprenant les expressions fournies dans l'énoncé :

- $I1 = \frac{m'L^2}{3}$ (moment de la tige en O)
- $J1 = \frac{mR^2}{2} + mL^2$ (moment du disque en O via le théorème de Huygens)

L'expression finale est donc :

$$J = \frac{m'L^2}{3} + \frac{mR^2}{2} + mL^2$$

---

5 – Etude dynamique : équation différentielle

5.1/ Bilan des forces

Le système $\{tige + disque\}$ est soumis à :

1. **Le poids total**, qui s'applique au centre d'inertie du système (ou on peut considérer séparément le poids de la tige $Ptige$ en C et le poids du disque $Pdisque$ en P).
2. **La réaction de l'axe** en O.

5.2/ Equation différentielle par le théorème du moment cinétique

On applique le théorème au point fixe O : $\frac{dLO}{dt} = \sum \mathcal{M}O(F)$.

- **Moment cinétique :** $LO = J\dot{\theta}ez$.
- **Moment des poids :**
  - $\mathcal{M}O(Ptige) = OC \wedge m'g = \frac{L}{2}er \wedge m'gex = -m'g\frac{L}{2}\sin\theta ez$.
  - $\mathcal{M}O(Pdisque) = OP \wedge mg = Ler \wedge mgex = -mgL\sin\theta ez$.

L'équation devient : $J\ddot{\theta} = -(m'g\frac{L}{2} + mgL)\sin\theta$.
Soit l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{gL(m + \frac{m'}{2})}{J}\sin\theta = 0$$

5.3/ Petites oscillations (Oscillateur harmonique)

Pour $\theta \ll 1$, $\sin\theta \approx \theta$. L'équation devient : $\ddot{\theta} + \omega_1^2\theta = 0$.
C'est bien la forme d'un **oscillateur harmonique**.

- **Pulsation propre ω_1 :**

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{gL(m + \frac{m'}{2})}{J}}$$

- **Période propre T_1 :**

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{gL(m + \frac{m'}{2})}}$$

---

6 – Simplification : retour au cas du pendule simple

Appliquons les hypothèses de l'énoncé :

1. **Masse de la tige négligeable ($m' \ll m$)** : on peut poser $m' \approx 0$.
2. **Disque ponctuel ($R \ll L$)** : on peut poser $R \approx 0$.

Impact sur le moment d'inertie J :
$J = \frac{0 \cdot L^2}{3} + \frac{m \cdot 0^2}{2} + mL^2 \implies \mathbf{J \approx mL^2}$

Impact sur l'équation différentielle :
Dans l'expression $\frac{gL(m+\frac{m'}{2})}{J}$, le numérateur devient gLm et le dénominateur mL^2.
Le rapport devient : $\frac{gLm}{mL^2} = \frac{g}{L}$.

Conclusion :
L'équation devient $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$.
On retrouve **exactement** l'équation différentielle du pendule simple de la première partie. Cela confirme que le modèle du pendule simple n'est qu'une approximation idéale d'un système réel où la tige est très légère et la masse très concentrée.