

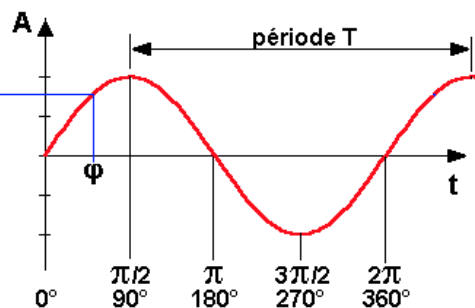
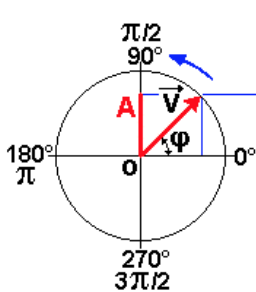
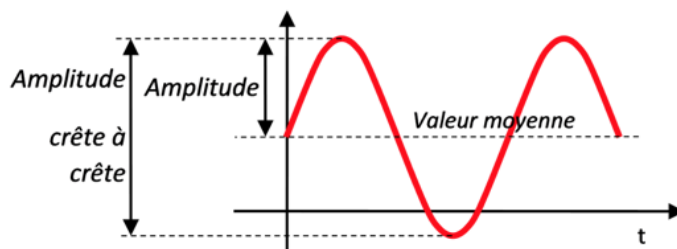
Les régimes sinusoïdaux

<p>Régime sinusoïdal forcé, impédances complexes.</p>	<p>Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime sinusoïdal.</p>
<p>Association de deux impédances</p>	<p>Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.</p>

Rappels d'Électrocinétique : Régime Sinusoïdal Forcé (RSF)

L'étude des tensions sinusoïdales est le pilier de l'électronique de puissance et du traitement du signal pour deux raisons majeures :

1. Le réseau électrique délivre une tension alternative sinusoïdale (220 V à 50 Hz).
2. La **décomposition en série de Fourier** permet de résoudre n'importe quel signal périodique complexe en le traitant comme une somme de fonctions sinusoïdales.



Période (s): T

fréquence(Hz) : $f = \frac{1}{T}$

pulsation (rad/s): $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

tension efficace: $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$

I. LA NOTATION COMPLEXE EN ELECTRICITE

I.1. La notation complexe

Soit une fonction sinusoïdale quelconque : $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$

où :

- E_m est l'**amplitude** (valeur maximale).
- $(\omega t + \varphi)$ est la **phase instantanée**.
- φ est la **phase à l'origine** (ou argument).

Représentation complexe

On associe à ce signal réel un signal complexe noté $\underline{e}(t)$:

$$\underline{e}(t) = E_m \exp j(\omega t + \varphi)$$

On peut séparer la partie temporelle de la partie constante :

$$\underline{e}(t) = \underline{E}_m \exp j(\omega t)$$

Où $\underline{E}_m = E_m \exp j(\varphi)$ est l'**amplitude complexe** du signal.

Le passage du signal complexe \underline{e} au signal réel $e(t)$ s'effectue tout simplement en remarquant que :

$$e(t) = \text{Re}(\underline{e})$$

D'après la formule d'Euler : $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$.

En l'appliquant à notre signal :

$$\underline{e}(t) = E_m (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi))$$

La partie réelle est bien : $\text{Re}(\underline{e}(t)) = E_m \cos(\omega t + \varphi) = e(t)$

On peut remarquer également que l'amplitude complexe \underline{E}_m contient toutes les informations utiles sur le signal sinusoïdal :

- l'amplitude du signal est le module de $\underline{E}_m(t)$
- la phase φ est l'argument de $\underline{E}_m(t)$

I.2 En quoi l'introduction de la notation complexe simplifie les résolutions ?

En Régime Sinusoïdal Forcé, la pulsation ω est la même partout dans le circuit. Les seules variables qui changent d'un composant à l'autre sont l'amplitude et la phase. Travailler avec E_m permet de supprimer le facteur temps ($e^{j\omega t}$) dans les calculs, transformant ainsi les équations différentielles en simples opérations algébriques sur les complexes.

En électrocinétique, les relations u(i) des composants (bobine et condensateur) font intervenir des opérateurs différentiels .

La notation complexe transforme ces opérations en de simples opérations algébriques. En effet, avec la notation complexe, dérivation et intégration sont simplifiées.

$$e(t) = E_m \exp j(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Calcul de : } \frac{d e(t)}{dt}, \frac{d^2 e(t)}{dt^2} \text{ et } \int e(t) dt$$

$$\frac{d e(t)}{dt} = j\omega E_m \exp j(\omega t + \varphi) = j\omega e(t)$$

$$\frac{d^2 e(t)}{dt^2} = -\omega^2 E_m \exp j(\omega t + \varphi) = -\omega^2 e(t)$$

$$\int e(t) dt = \frac{1}{j\omega} E_m \exp j(\omega t + \varphi) = \frac{1}{j\omega} e(t)$$

Dériver une fois par rapport au temps revient donc tout simplement à multiplier par $j\omega$, dériver deux fois, revient à multiplier par $-\omega^2$ et intégrer par rapport au temps, revient à diviser par $j\omega$.

I.3. Avantages de la méthode complexe

Algébrisation des équations

Grâce aux propriétés de l'exponentielle complexe, une équation différentielle comportant des dérivées temporelles se transforme en une **équation algébrique simple** (sans dérivées).

- Chaque dérivation première d/dt est remplacée par une multiplication par $j\omega$.
- Chaque dérivation seconde d^2/dt^2 est remplacée par une multiplication par $(j\omega)^2$, soit $-\omega^2$.

Élimination du temps

Dans un circuit linéaire en RSF, toutes les grandeurs (tensions et courants) oscillent à la même pulsation ω . Par conséquent :

- Le terme $e^{j\omega t}$ apparaît en facteur dans chaque membre des équations.
- On peut donc le **simplifier (diviser)** de chaque côté.
- Le paramètre "temps" disparaît totalement des calculs intermédiaires.

II. L'IMPEDANCE COMPLEXE

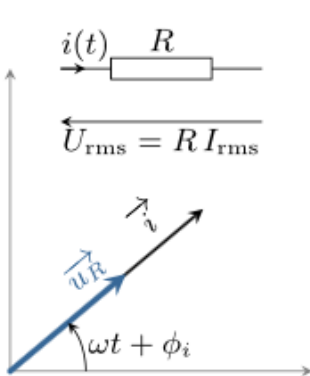
Pour la bobine, le condensateur et la résistance, il est possible d'écrire une relation de simple proportionnalité entre la tension complexe et le courant complexe :

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \quad \text{C'est la loi d'ohm complexe.}$$

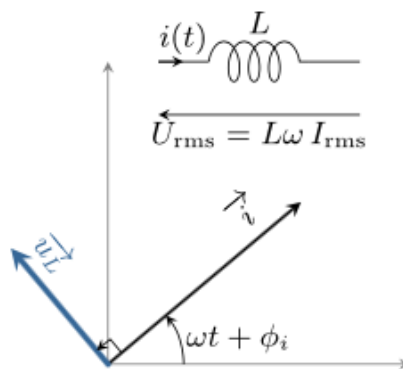
\underline{Z} est appelée **impédance complexe**.

II.1 Impédances usuelles

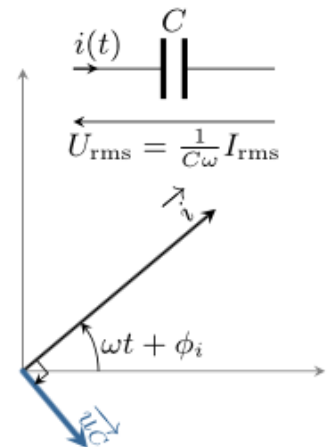
Composant	Relation Temporelle	Relation Complexe	Impédance \underline{Z}
Résistor (R)	$u(t) = R \cdot i(t)$	$\underline{u} = R \cdot \underline{i}$	$\underline{Z}_R = R$
Bobine (L)	$u(t) = L \frac{di}{dt}$	$\underline{u} = jL\omega \cdot \underline{i}$	$\underline{Z}_L = jL\omega$
Condensateur (C)	$i(t) = C \frac{du}{dt}$	$\underline{i} = jC\omega \cdot \underline{u}$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$



u et i en phase



u en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur i



i en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur u

Comportement à basses fréquences ($\omega \rightarrow 0$).

$Z_C \rightarrow \infty$ (condensateur équivalent à un coupe-circuit) et $Z_L \rightarrow 0$ (bobine équivalente à un fil).

Comportement à hautes fréquences $\omega \rightarrow \infty$:

$Z_C \rightarrow 0$ (condensateur équivalent à un fil) et $Z_L \rightarrow \infty$ (bobine équivalente à un coupe-circuit).

II.2 Remarques importantes

$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$ s'écrit en module : $|\underline{U}| = |\underline{Z}| \cdot |\underline{I}|$. D'où $|\underline{Z}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|}$

Le module de \underline{U} est l'amplitude de la tension $u(t)$ et le module de \underline{I} est l'amplitude du courant $i(t)$.

Le module de l'impédance est le rapport entre l'amplitude de la tension aux bornes du composant et l'amplitude du courant circulant dans ce composant.

$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$ s'écrit en phase : $\arg(\underline{U}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{I})$. D'où $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$.

L'argument de \underline{U} est la phase de la tension $u(t)$ et l'argument de \underline{I} est la phase du courant $i(t)$.

L'argument de l'impédance d'un composant est le déphasage entre la tension aux bornes du composant et le courant circulant dans ce composant.

la bobine : $\underline{Z} = jL\omega$ $|\underline{Z}| = L\omega$ $\arg(\underline{Z}) = \pi / 2$

le condensateur : $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}$ $|\underline{Z}| = 1/ C\omega$ $\arg(\underline{Z}) = - \pi / 2$

la résistance : $\underline{Z} = R$ $|\underline{Z}| = R$ $\arg(\underline{Z}) = 0$

On peut également introduire l'admittance complexe notée \underline{Y} : $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$. La loi d'ohm $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$ s'écrit alors : $\underline{I} = \underline{Y} \underline{U}$.

\underline{Z} est complexe, et contient donc une partie réelle et une partie imaginaire : $\underline{Z} = R + jX$:
 \underline{Z} est l'impédance, R s'appelle résistance et X réactance.

De même \underline{Y} s'écrit : $\underline{Y} = G + j X'$

\underline{Y} est une admittance, G une conductance et X' une susceptance.

III. LES THEOREMES GENERAUX DES CIRCUITS LINEAIRES

L'un des plus grands avantages de la notation complexe est l'**unification des lois**. En remplaçant la résistance R par l'impédance complexe \underline{Z} , tous les théorèmes de l'électrocinétique vus en courant continu restent valables en Régime Sinusoïdal Forcé (RSF).

III.1. Les lois de Kirchhoff en notation complexe

La loi des noeuds

Soit un noeud dans lequel arrivent des courants I_k . Les signes sont choisis positifs si les courants arrivent dans ce noeud; à l'inverse leur signe est négatif s'ils en repartent.

La loi des noeuds s'écrit simplement (dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires) :

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0$$

La loi des mailles

Soit une maille composée de plusieurs impédances (non nécessairement en série). Les tensions aux bornes des composants sont notées U_k . Les signes sont choisis positifs si la flèche tension est dans le sens de parcours choisi pour la maille et négatifs si sens contraires.

La loi des mailles s'écrit simplement (dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires) :

$$\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = 0$$

III.2 Association d'impédances complexes, calcul d'impédances équivalentes

Association série : $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n = \sum \underline{Z}_i$

Associations parallèles

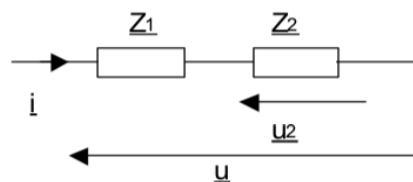
Considérons deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 placées en parallèle : $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\underline{Z}_i} \right)$

ou encore : $\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n$. (somme des admittances).

III.3 Le pont diviseur de tension et le pont diviseur de courant

Le pont diviseur de tension

Considérons deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 placées en série.

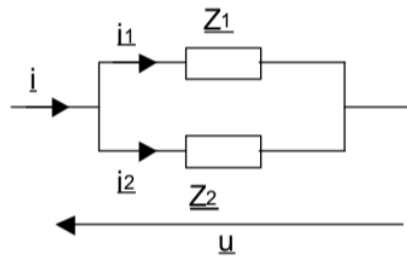


La tension aux bornes de l'impédance \underline{Z}_2 est : $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I} = \underline{Z}_2 \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$

Relation du pont diviseur de tension : $\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$

Attention: pour pouvoir appliquer le pont diviseur de tension, il est absolument nécessaire que le courant traversant les deux impédances soit le même!

Le pont diviseur de courant



$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1$$

$$\underline{U} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$$

La tension aux bornes de ces deux composants est la même. Compte tenu de l'additivité des courant (loi des noeuds), il vient :

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = \frac{U}{Z_1} + \frac{U}{Z_2} \\ I &= \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) U = \frac{1}{Z_{eq}} U. \end{aligned}$$

Le courant circulant dans l'impédance \underline{Z}_2 est :

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \underline{Y}_2 \underline{U} = \frac{\underline{Y}_2 \underline{I}}{\underline{Y}_{eq}} \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I} = \frac{(1/\underline{Z}_2)}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2} \underline{I}. \end{aligned}$$

PLAN

I. LA NOTATION COMPLEXE EN ELECTRICITE

I.1. La notation complexe

I.2 En quoi l'introduction de la notation complexe simplifie les résolutions ?

II. L'IMPEDANCE COMPLEXE

II.1 Impédances usuelles

II.2 Remarques importantes

III. LES THEOREMES GENERAUX DES CIRCUITS LINEAIRES

III.1. Les lois de Kirchhoff en notation complexe

III.2 Association d'impédances complexes, calcul d'impédances équivalentes

III.3 Le pont diviseur de tension et le pont diviseur de courant